

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук
Steklov Mathematical Institute
of the Russian Academy of Sciences

Самарский государственный университет
Samara State University

**Международная конференция
по математической физике
и ее приложениям**

**International Conference
on Mathematical Physics
and Its Applications**



Самара, Россия, 8–13 сентября 2008 г.
Samara, Russia, September 8–13, 2008

**Тезисы докладов
Abstracts**

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

Самарский государственный университет

**Международная конференция
по математической физике
и ее приложениям**

Самара, Россия, 8–13 сентября 2008 г.



Тематика конференции включает избранные вопросы по следующим направлениям:

- Уравнения математической физики;
- Квантовая теория;
- Математические модели наносистем;
- р-Адиическая математическая физика,

а также примыкающие разделы бесконечномерного анализа, геометрические и алгебраические методы, квантовая вероятность, приложения математической физики в механике, химии, биологии, экономике, информатике.

Организационный комитет: И.В. Волович, В.И. Астафьев, Г.П. Яровой, М.О. Катанаев, А.А. Андреев, Л. Аккарди, И.Я. Арефьева, А.Х. Бикулов, В.С. Владимиров, Б. Драгович, М.В. Долгополов, В.В. Жаринов, Б.И. Завьялов, И.П. Завершинский, В.А. Загребнов, Е.И. Зеленов, А.П. Зубарев, М.Г. Иванов, В.В. Ивахник, С.В. Козырев,

А.Н. Кочубей, В.П. Михайлов, С.Я. Новиков, М. Ойя,
А.Н. Панов, А.Н. Печень, Я.В. Радыно, О.Г. Смолянов,
В.А. Соболев, А.Ю. Хренников, О.П. Филатов.

http://mph_samara.mi.ras.ru/

Steklov Mathematical Institute
of the Russian Academy of Sciences

Samara State University

International Conference on Mathematical Physics and Its Applications

Samara, Russia, September 8–13, 2008



The Conference topics include:

- Equations of mathematical physics;
- Quantum theory;
- Mathematical models of nanosystems;
- p-Adic mathematical physics,

and related topics from infinite dimensional analysis, geometric and algebraic methods, quantum probability, quantum information, applications of mathematical physics in mechanics, chemistry, biology, economics, informatics.

Organizing Committee: I.V. Volovich, V.I. Astafiev,
G.P. Yarovoy, M.O. Katanaev, L. Accardi, A.A. Andreev,
I.Ya. Aref'eva, A.Kh. Bikulov, M.V. Dolgoplov, B. Dragovich,
O.P. Filatov, V.V. Ivakhnik, M.G. Ivanov, A.Yu. Khrennikov,
A.N. Kochubei, S.V. Kozyrev, V.P. Mikhailov, S.Ya. Novikov,
M. Ohya, A.N. Panov, A.N. Pechen, Ya.V. Radyno,
O.G. Smolyanov, V.A. Sobolev, V.S. Vladimirov,
I.P. Zavershinsky, V.A. Zagrebnoy, B.I. Zavalov, E.I. Zelenov,
V.V. Zharinov, A.P. Zubarev.

http://mph_samara.mi.ras.ru/index_e.html

Список участников
List of participants

1. Абрамов Владимир Владимирович `vva85@mail.ru`
Самарский государственный технический университет, Россия
2. Аветисов Владик Аванесович `avetisov@chph.ras.ru`
Институт химической физики им. Н.Н.Семенова РАН, Россия
3. Аккарди Луиджи (Accardi Luigi) `accardi@volterra.uniroma2.it`
Rome University, Италия
4. Алякин Владимир Алексеевич `aval@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
5. Андреев Александр Анатольевич `andre@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
6. Андреева Алена Владимировна `Andreeva.83@inbox.ru`
Самарский государственный университет, Россия
7. Анкилов Андрей Владимирович `ankil@ulstu.ru`
Ульяновский государственный технический университет, Россия
8. Арефьева Ирина Ярославна `arefeva@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
9. Базлаев Алексей Николаевич `bazlaev@rambler.ru`
Сибирский федеральный университет, Россия
10. Башкиров Евгений Константинович `bash@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
11. Белопольская Яна Исаевна `yanabeus@yahoo.com`
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия
12. Бениаминов Евгений Михайлович `ebeniamin@yandex.ru`
Российский государственный гуманитарный университет, Россия

13. Бикулов Альберт Хакимович `bikulov1903@rambler.ru`
Институт химической физики им. Н.Н.Семенова РАН, Россия
14. Билык Виктор Анатольевич `bilyk@tltsu.ru`
Тольяттинский государственный университет, Россия
15. Богданова Софья Борисовна `sonjaf@list.ru`
Московский государственный областной университет, Россия
16. Борисов Андрей Олегович `andborisov@rambler.ru`
Самарский государственный университет, Россия
17. Боровец Андрей Здислав (Borowiec Andrzej Zdzislaw)
`borow@ift.uni.wroc.pl`
Institute for Theoretical Physics, University of Wroclaw, Польша
18. Братков Юрий Николаевич `icm2006@rambler.ru`
Центральный НИИ машиностроения, Россия
19. Брызгалов Александр Анатольевич `sandro185@mail.ru`
Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики, Россия
20. Васильев Владимир Борисович `vbv57@inbox.ru`
Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского,
Россия
21. Ватанабе Нобору (Watanabe Noboru) `watanabe@is.noda.tus.ac.jp`
Tokyo University of Science, Япония
22. Вельмисов Петр Александрович `velmisov@ulstu.ru`
Ульяновский государственный технический университет, Россия
23. Вернов Сергей Юрьевич `svernov@theory.sinp.msu.ru`
НИИ Ядерной физики МГУ, Россия
24. Волович Игорь Васильевич `volovich@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
25. Воробьев Сергей Александрович `savor@nostra.by`
Белорусский государственный университет транспорта

26. Гасимов Юсиф Солтан (Gasimov Yusif Soltan) `yusifcan@rambler.ru`
Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Азербайджан
27. Горбачев Роман Викторович `rgorbachev@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
28. Горохов Александр Викторович `gorokhov@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
29. Гусев Николай Анатольевич `nick.goussev@gmail.com`
Московский физико-технический институт, Россия
30. Гуцин Анатолий Константинович `akg@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
31. Дегтярев Михаил Владимирович `ldpr63@mail.ru`
Самарская Губернская Дума, Россия
32. Джураев Хайрулло Шарофович `hayrullo_58@mail.ru`
Таджикский государственный национальный университет,
Таджикистан
33. Долгополов Вячеслав Михайлович `mvdolg@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
34. Долгополов Михаил Вячеславович `mvdolg@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
35. Дрожжинов Юрий Николаевич `drozzin@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
36. Дурдиев Дурдимурат Каландарович `durdiev65@mail.ru`
Бухарский государственный университет, Узбекистан
37. Жаринов Виктор Викторович `zharinov@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
38. Жданов Александр Иванович `zhdanov@smr.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия

39. Завершинский Игорь Петрович `zav@smr.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П.Королева, Россия
40. Завьялов Борис Иванович `bzavial@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
41. Закирова Галия Амрулловна `zakirova81@mail.ru`
Магнитогорский государственный университет, Россия
42. Зарубин Александр Николаевич `aleks_zarubin@mail.ru`
Орловский государственный университет, Россия
43. Зеленов Евгений Игоревич `evgeny.zelenov@gmail.com`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
44. Зубарев Александр Петрович `apzubarev@mail.ru`
Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия
45. Зынь Владислав Иванович `zyn37@mail.ru`
Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия
46. Иванов Михаил Геннадьевич `mgi@mi.ras.ru`
Московский физико-технический институт, Россия
47. Исмагилова Рина Ринатовна `isriri@mail.ru`
Самарский государственный университет, Россия
48. Ишиватари Такуми `takumi@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
49. Кайракбаев Аят Крымович `kairak@mail.ru`
Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия
50. Калинин Михаил Иванович `mkstat@mail.ru`
Всероссийский научно-исследовательский институт
метрологической службы, Россия
51. Камалов Тимур Фянович `qubit@mail.ru`
Московский государственный открытый университет, Россия

52. Канакова Елена Андреевна HelenStar777@yandex.ru
Самарский государственный университет
53. Каплицкий Виталий Маркович kaplitsky@donpac.ru
Южный федеральный университет, Россия
Институт прикладной математики и информатики
Владикавказского научного центра РАН, Россия
54. Клепнев Дмитрий Эдуардович dekl@ssu.samara.ru
Самарский государственный университет, Россия
55. Климова Елена Николаевна elenaklimova25@gmail.com
Самарский государственный университет путей сообщения, Россия
56. Коваленко Людмила Викторовна flytitmouse@mail.ru
Самарский государственный технический университет, Россия
57. Коган Ефим Яковлевич efkogan@yandex.ru
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия
58. Козырев Сергей Владимирович kozyrev@mi.ras.ru
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
59. Костюкевич Юрий Иродинонович yura542@rambler.ru
Московский физико-технический институт, Россия
60. Косых Эдурд Григорьевич ed-ksykh@rambler.ru
Белорусский госуниверситет транспорта, Беларусь
61. Кочубей Анатолий Наумович kochubei@i.com.ua
Институт математики НАН, Украина
62. Крутов Александр Федорович krutov@ssu.samara.ru
Самарский государственный университет, Россия
63. Ксу Да (Xu Da) dxu@math.uiowa.edu
University of Iowa, США
64. Кудинов Максим Юрьевич mkudinov7@rambler.ru
Самарский государственный университет, Россия

65. Курушина Светлана Евгеньевна `kurushina72@mail.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия
66. Ламажапов Хубита Доржиевич `hubita@mail.ru`
Самарский государственный университет путей сообщения, Россия
67. Лаштабега Оксана Владимировна `tanda80@yandex.ru`
Орловский государственный университет, Россия
68. Латышова Наиля Масхутовна `nailya99@yandex.ru`
Самарский государственный университет путей сообщения, Россия
69. Лежнев Виктор Григорьевич `lzhnv@mail.kubsu.ru`
Кубанский государственный университет, Россия
70. Лексина Светлана Валентиновна `lesveta@rambler.ru`
Самарский Государственный Университет, Россия
71. Леоненко Денис Владимирович `leoden@tut.by`
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
72. Лесев Вадим Николаевич `lvn_kbsu@mail.ru`
Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М. Бербекова, Россия
73. Лыков Константин Владимирович `alkv@list.ru`
Самарский государственный университет, Россия
74. Мавлявиев Ринат Мизхатович `mavly@mail.ru`
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Россия
75. Максимов Валерий Владимирович `kurushina72@mail.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия
76. Мамедов Ильгар Гурбат `ilgar-mammadov@rambler.ru`
Институт Кибернетики НАН, Азербайджан
77. Марковский Алексей Николаевич `lelikss78@rambler.ru`
Кубанский государственный университет, Россия

78. Марчук Николай Гурьевич `nmarchuk2005@yandex.ru`
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия
79. Минаждинова Лилия Анясовна `lilli05@mail.ru`
Магнитогорский государственный университет, Россия
80. Минин Игорь Владиленович `igor.minin@ngs.ru`
Новосибирский государственный технический университет, Россия
81. Миссаров Мукадас Дмухтасибович `Moukadas.Missarov@ksu.ru`
Казанский Государственный Университет, Россия
82. Митрохин Сергей Иванович `mitrokhin@srcc.msu.ru`
Научно-исследовательский вычислительный центр
МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия
83. Михайлов Валентин Петрович `akg@mi.ras.ru`
Математический институт им В.А.Стеклова РАН, Россия
84. Молчатский Лев Соломонович `levmol@yandex.ru`
Самарский государственный педагогический университет, Россия
85. Неганов Вячеслав Александрович `Neganov-samara@yandex.ru`
Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики, Россия
86. Незбайло Тиберий Георгиевич `tiberiyn@rambler.ru`
Научно-производственное объединение, Россия
87. Нифтиев Агхаддин Аслан (Niftiyev Aghaddin Aslan) `aniftiyev@yahoo.com`
Baku state university, Азербайджан
88. Нурмамедов Магомед Ахмад `nurmamedov@mail.ru`
Азербайджанская государственная нефтяная академия, Азербайджан
89. Масанори Ойя (Masanori Ohya) `ohya@rs.noda.tus.ac.jp`
Tokyo University of Science, Япония
90. Огородников Евгений Николаевич `nik-yashagin@yandex.ru`
Самарский государственный технический университет, Россия

91. Онищенко Дмитрий Дмитриевич onish_dd@mail.ru
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Россия
92. Оршубеков Нурбек Абубекович al_jan@mail.ru
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан
93. Панина Ольга Геннадьевна realex@hotmail.ru
Ульяновский государственный университет, Россия
94. Печень Александр Николаевич pechen@newmail.ru
Принстонский Университет, США
95. Пешин Сергей Владимирович svp288@ire216.msk.su
Институт радиотехники и электроники РАН, Россия
96. Писковский Евгений Михайлович piskovskiev@yahoo.com
Математический институт им. В.А. Стеклова, Россия
97. Плескачевский Юрий Михайлович pleskym@mail.ru
Белорусский национальный технический университет, Беларусь
98. Пльшевская Татьяна Константиновна plish@mail.ru
Магнитогорский государственный университет, Россия
99. Поздеева Екатерина Олеговна ekatpozdeeva@mail.ru
Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Россия
100. Попов Михаил Алексеевич Michael282@ya.ru
Oxford University, Великобритания
101. Попов Николай Николаевич ponick25@gmail.com
Самарский государственный технический университет, Россия
102. Потапов Александр Алексеевич potapov@mail.cplire.ru
Институт радиотехники и электроники РАН, Россия
103. Протуро Иван Иванович aaalpha@mail.ru
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
104. Радченко Владимир Павлович radch@pm.samgtu.ru
Самарский государственный технический университет, Россия

105. Радыно Александр Яковлевич `alesr@tut.by`
Белорусский государственный университет, Беларусь
106. Радыно Евгений Мефодьевич `yauhen.radyna@gmail.com`
Белорусский государственный университет, Беларусь
107. Радыно Яков Валентинович `radyno@bsu.by`
Белорусский государственный университет, Беларусь
108. Ратис Юрий Леонидович `ratis@samtel.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия
109. Репин Олег Александрович `matstat@mail.ru`
Самарский государственный экономический университет, Россия
110. Рогачева Елена Валерьевна `elena@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
111. Родионова Ирина Николаевна `mvdolg@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
112. Рощин Роман Альбертович `roschin001@rambler.ru`
Московский филиал Align Technology R&D, Россия
113. Рудой Юрий Григорьевич `rudikar@mail.ru`
Российский университет дружбы народов, Россия
114. Рыкова Эльза Нуровна `elza_ily@rambler.ru`
Самарский государственный университет, Россия
115. Сакбаев Всеволод Жанович `fumi2003@mail.ru`
Московский физико-технический университет, Россия
116. Сандраков Геннадий Викторович `sandrako@mail.ru`
Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, Украина
117. Сафарова Наргиз Ахмад (Safarova Nargiz Ahmad)
`narchis2003@yahoo.com`
Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Азербайджан
118. Саушкин Михаил Николаевич `msaushkin@gmail.com`
Самарский государственный технический университет, Россия

119. Седлецкий Анатолий Мечиславович `sedlet@mail.ru`
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Россия
120. Сейткулов Ержан Нураханович `erj@mail.ru`
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева,
Казахстан
121. Сеницкий Александр Юрьевич `y-abc@mail.ru`
Самарский государственный университет путей сообщения, Россия
122. Сергеев Армен Глебович `sergeev@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия
123. Синайский Илья Евгеньевич `ilsinay@gmail.com`
Университет КваЗулу-Наталь, ЮАР
124. Синев Александр Михайлович `sansin@mail.ru`
Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, Россия
125. Ситник Сергей Михайлович `mathsms@yandex.ru`
Воронежский институт МВД, Россия
126. Слезко Ирина Викторовна `slezkoirina@rambler.ru`
Тюменский государственный университет, Россия
127. Смолянов Олег Георгиевич `smolyanov@yandex.ru`
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Россия
128. Солдатов Александр Павлович `soldatov48@mail.ru`
Белгородский государственный университет, Россия
129. Солдатова Наталья Геннадьевна `solnata@mail.ru`
Московский государственный областной педагогический институт,
Россия
130. Соскинд Эдуард Саявич `Aleksandr.Dengov@giprovostokneft.ru`
ОАО «Гипровостокнефть», Россия
131. Старовойтов Эдуард Иванович `edstar@mail.by`
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

132. Старовойтова Елена Эдуардовна `edstar@mail.by`
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
133. Степанова Лариса Валентиновна `lst@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
134. Стеряков Александр Александрович `lubopitnij@mail.ru`
Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П. Королева, Россия
135. Ступацкая Мария Петровна `bash@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия
136. Суханов Александр Дмитриевич `ogol@oldi.ru`
Объединённый институт ядерных исследований, Россия
137. Табаков Дмитрий Петрович `Dimatabakov@rambler.ru`
Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики, Россия
138. Талалов Сергей Владимирович `svtalalov@tltsu.ru`
Тольяттинский государственный университет, Россия
139. Трушечкин Антон Сергеевич `trushechkin@mi.ras.ru`
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия
140. Трушков Владимир Викторович `vladimir@trushkov.pereslavl.ru`
Университет города Переславля, Россия
141. Турметов Батирхан Худайбергенович `turmetovbh@mail.ru`
Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Ясави,
Казахстан
142. Тухватуллин Артур Рашитович `TAR5ARTUR5@rambler.ru`
Тольяттинский военный технический институт, Россия
143. Хренников Андрей Юрьевич `andrei.khrennikov@vxu.se`
International Center for Mathematical Modeling, University of Vaxjo,
Швеция
144. Цирова Наталья Александровна `ntsirova@ssu.samara.ru`
Самарский государственный университет, Россия

145. Чуприков Николай Леонидович `chnl@tspu.edu.ru`
Томский государственный педагогический университет, Россия
146. Чуркина Наталья Валерьевна `natalia.churkina@gmail.com`
Тольяттинский государственный университет, Россия
147. Шамаров Николай Николаевич `nshamarov@yandex.ru`
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
148. Шевелёва Дарья Васильевна `sheveleva@gtng.ru`
ОАО «Гипротюменнефтегаз», Россия
149. Шелкович Владимир Михайлович `shelkv@yahoo.com`
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет,
Россия
150. Шибельбаин Галина Алексеевна `lesveta@rambler.ru`
Самарский государственный университет, Россия
151. Эфендиев Ракиб Фейруз (Efendiev Rakib Feyruz)
`rakibaz@yahoo.com`
Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Азербайджан
152. Янкевич Ольга Александровна `olga_ssttu@mail.ru`
Самарский государственный педагогический университет, Россия

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ
ABSTRACTS

Н.Н. Боголюбов и символ $M \cap \Phi$

В. С. Владимиров

Математический институт им.В.А.Стеклова РАН, Россия

vladimirov@mi.ras.ru

В 2009 году исполняется 100 лет со дня рождения академика Николая Николаевича Боголюбова (21.09.1909 – 13.02.1992). В связи с этим уместно вспомнить здесь о его научном наследии, о его влиянии как математика на развитие современной теоретической и математической физики, о его жизненном пути, о его личности, о его мощном интеллекте, отмеченном печатью гениальности. Н.Н. Боголюбов – математик Божьей милостью – по праву принадлежит к той плеяде великих русских учёных XX века, которые создали всемирно известную математическую школу в нашей стране. Его имя занимает достойное место в мировой математике, наряду с именами Пуанкаре, Гильберта, Колмогорова, Дирака, Понтрягина,...

Поражает широта исследований Н.Н. Боголюбова в математике, механике, физике. Это – динамические системы, вариационное исчисление, почти периодические функции, численные методы, теория колебаний, асимптотические методы, статистическая механика, статистическая физика, квантовая теория поля, квантовая статистическая физика, кварковые модели (цвет), автомодельная асимптотика, сверхтекучесть и сверхпроводимость, управляемый термоядерный синтез, создание новых направлений в математике и математической физике, создание нового математического аппарата для решения новых задач физики. Так Нобелевская премия по физике-2001 была присуждена за экспериментальное открытие Бозе-Эйнштейновского конденсата в разреженных газах, что полностью подтвердило теорию Н.Н. Боголюбова 1947 года о сверхтекучести. К сожалению, в пресс-релизе об этой премии имя Боголюбова не было даже упомянуто.

Математическая физика сегодняшнего дня это – синтез почти всех разделов современной математики, начиная с математической логики и теории чисел вплоть до вычислительной математики с широким использованием суперЭВМ. Органическое слияние математики и физики в творчестве Н.Н. Боголюбова позволило ему внести решающий вклад в развитие теоретической физики и фактически заложить основы современной математической физики, продолжающей традиции классиков науки.

Уже в 1963 году Н.Н. Боголюбов имел полное основание утверждать: «Основные понятия и методы квантовой теории поля становятся всё более математическими». Теперь можно бы сказать больше: «Теоретическая физика всё в большей степени становится математической физикой».

В программном выступлении (Алушта, май 1981) Н.Н. Боголюбов так оценивал положение в современной математической физике:

«У нас на глазах за последние годы оформилась совершенно новая область науки, которую уместнее всего назвать современной математической физикой.

Она имеет то же генетическое происхождение, что и классическая математическая физика. Но если теория дифференциальных уравнений в частных производных порождалась задачами классической физики: теорией потенциала, теорией распространения электромагнитных волн и т.п., то оказывается, что современная теоретическая физика – квантовая теория систем с бесконечным числом степеней свободы – требует иных, более абстрактных и современных математических средств. Это, в первую очередь, теория обобщённых функций, функциональный анализ и теория операторов, теория представлений групп и алгебр, топологическая алгебра и т.п.

Решение новых физических задач квантовой теории поля сначала искали на путях усовершенствования обычных методов квантовой механики. В это время физики успели убедиться, что для получения разумных ответов на свои вопросы они должны глубже понять математическую природу объектов исследования, таких как обобщённые функции или неограниченные операторы, повысить принятый стандарт доказательной силы аргументации.

В дальнейшем, для того, чтобы освободиться от чрезмерной и иногда бессмысленной детализации, стали изыскивать аксиоматические пути построения теории. Тогда стало очевидно, что современные математические методы позволяют получать иногда очень сильные результаты. Вспомним в этой связи о теории многих комплексных переменных, или о понятии слабой эквивалентности представлений.

Вспомним, наконец, что ряд специфических квантовых явлений является прямой физической иллюстрацией знаменитой теоремы фон Неймана о существовании неэквивалентных представлений в случае бесконечного числа степеней свободы.

Упомянутые примеры относятся и к квантовой электродинамике, и к теории сильных взаимодействий при высоких энергиях, и к задачам статистической физики. В частности, в физике сильных взаимодействий, ввиду сложности динамической картины, особенно полезны оказались дисперсионные методы, основанные на общих аналитических свойствах амплитуды процесса. Они имеют уже сейчас непосредственные приложения к потребностям экспериментальных исследований.

Мы находимся в самом начале пути. Достаточно вспомнить, что вне теории возмущений ещё не построено ни одного нетривиального примера квантовой теории поля, достаточно близкого к реальному физическому миру в четырех измерениях.

Обращение физиков к методам современной математики, интерес математиков к задачам квантовой физики – взаимно плодотворным.»

Эти основополагающие принципы были заложены Н.Н. Боголюбовым при создании как нового журнала «Теоретическая и математическая физика» (ТМФ, 1969), так и при организации первой Международной конференции по теоретической и математической физике (1972).

Оба эти направления были оснащены символом

$$M \cap \Phi,$$

(M – Математика; Φ – Физика¹, отражающим, следуя традициям Боголюбовской школы, общее между математикой и физикой).

С 12 по 18 декабря 1972 года в Москве, в Математическом институте им.В.А.Стеклова АН СССР, состоялась Международная конференция по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистики (председатель оргкомитета Н.Н. Боголюбов, заместители председателя В.С. Владимиров и А.Н. Тавхелидзе).

В работе московской конференции приняли участие 280 учёных, в том числе 189 из СССР и 91 из 18 зарубежных стран. В работе Конференции принимали участие как математики, так и физики-теоретики, работающие в квантовой теории поля, квантовой статистической физике, теории элементарных частиц и в родственных областях математики. Среди иностранных учёных участвовали – Н. Araki, R. Haag, A. Licnerowicz, H. Lehmann, J. Glimm, A. Jaffe, I. Segal, I. Bialinicki-Dirula, K. Hepp, M. Flato, I.T. Todorov, S. Doplicher, D. Sternheimer, D. Kastler, J. Bros, D. Iagolnitzer, R. Streater, C. DeWitt-Morette, G. Sommer, E.R. Caianiello, J.R. Klauder, A. Uhlmann, N.M. Hugenholtz, E.C.D. Cohen, G. Lassner, E. Bresin, Y. Tomozawa, J. Lukierski, K. Pohlmeier, J.E. Roberts, O. Steinmann, B. Schroer, W. Zimmermann, H. Leutwyler, R.G. Newton, M. Takesaki, H. Reeh, N.N. Khuri, V. Mielnik, J. Simon, H. Dorn, H.J. Kaiser.

Из числа советских участников отметим следующих: Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.), В.С. Владимиров, И.В. Волович, В.Г. Кадышевский, А.А. Логунов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян, А.А. Славнов, А.Н. Тавхелидзе, Л.Д. Фаддеев, Д.В. Ширков.

Конференция открылась пленарным заседанием с двумя докладами: Н.Н.Боголюбова, В.С.Владимирова, А.Н.Тавхелидзе «Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля» и Р.Хаага, С.Доплихера, Д.Робертса

¹Ф – фита (русск.)

«Локальность и статистика». Все остальные доклады (а их было 90) были разделены по тематике на три параллельные секции: Аксиоматическая квантовая теория поля, Поля и частицы, Математические вопросы квантовой статистики.

Труды Конференции опубликованы в Трудах Математического института им. В.А. Стеклова, Москва: Наука, 1975, т.135, часть I, Аксиоматическая квантовая теория поля; 1975, т.136, часть II, Поля и частицы. Математические вопросы квантовой статистики.

Эта, московская, конференция положила начало регулярным международным конференциям (симпозиумам) по теоретической физике и современной математической физике, проводимых в рамках Международной ассоциации по математической физике (IAMP). Следующие конференции проходили в Варшаве (1974), Киото (1975), Риме (1977), Лозанне (1979), Западном Берлине (1981), Боулдере (1983), Марселе (1986), Суонси (1988), Лейпциге (1991), Париже (1994), Брисбене (1997). Последние четыре конференции – XIII-я в Лондоне (ICMP-2000), XIV-я в Лиссабоне (ICMP-2003), XV-я в Рио-де-Жанейро (ICMP-2006) и предстоящая XVI-я в Праге (ICMP-2009) уже называются Международными конгрессами по математической физике.

Применение методов Адамса с переменным шагом к решению уравнений движения астероидов

В. В. Абрамов

Самарский государственный технический университет, Россия

vva85@mail.ru

В настоящее время по-прежнему актуальной является проблема выбора эффективного метода численного интегрирования для решения дифференциальных уравнений движения небесных тел Солнечной системы. Например, специализированный метод Эверхарта, который является неявным одношаговым методом, демонстрирует высокую точность вычислений, сохраняя устойчивость даже при наличии тесных сближений небесных тел. Однако интегрирование с помощью метода Эверхарта осуществляется достаточно медленно, что может являться существенным недостатком, например, при исследовании эволюции орбит большого числа малых тел Солнечной системы на длительных интервалах времени.

В данной работе для исследования эволюции орбит астероидов использовались методы Адамса с разделенными разностями. Данная форма записи позволяет производить численное интегрирование с переменным шагом.

Это дает ряд преимуществ по сравнению с использованием методов Адамса с постоянным шагом.

Во-первых, изменение величины шага интегрирования в методах Адамса с разделенными разностями не требует производить закладку таблицы интегрирования и какие-либо другие дополнительные вычисления. Во-вторых, возможность плавного изменения величины шага упрощает построение критериев выбора оптимального шага интегрирования. В-третьих, данный алгоритм обладает более высоким быстродействием в моменты тесных сближений небесных тел.

Закладка таблицы интегрирования осуществлялась только в начальный момент времени для старта многошагового метода. В отсутствие тесных сближений малых тел с большими планетами численное интегрирование осуществлялось с постоянным шагом 0,2 дня. В моменты сближений величина шага плавно уменьшалась по мере сокращения расстояния между телами. По завершении сближения шаг вновь плавно увеличивался до первоначальной величины 0,2 дня.

Вычисления производились по формулам методов Адамса с разделенными разностями и в моменты тесных сближений, и при их отсутствии. Только в последнем случае величина шага оставалась постоянной. Это было сделано в целях оптимизации, поскольку в данном случае не требуется пересчет коэффициентов в методах Адамса с разделенными разностями. Таким образом, коэффициенты необходимо пересчитывать только в кратковременные моменты тесных сближений, поскольку в этом случае происходит плавное изменение шага.

Результаты вычислений координат и компонент скоростей небесных тел достаточно хорошо согласуются с соответствующими результатами, полученными с помощью методов Адамса с постоянным шагом и модифицированного метода Эверхарта. При этом процесс численного интегрирования осуществляется соответственно в 1,5 и в 4 раза быстрее.

Более высокое быстродействие достигается благодаря плавности смены шага, а также вследствие того, что при изменении величины шага интегрирования в методах Адамса с разделенными разностями не требуется производить закладку таблицы интегрирования и какие-либо другие дополнительные вычисления. Также возможность плавного изменения величины шага упрощает построение критериев выбора оптимального шага интегрирования. Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что применение методов Адамса с разделенными разностями является более предпочтительным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1.1689).

Are proteins ultrametric?

V. A. Avetisov

Semenov Institute of Chemical Physics RAS, Russia

avetisov@chph.ras.ru

A. Kh. Bikulov

Semenov Institute of Chemical Physics RAS, Russia

bikulov1903@rambler.ru

The question posed in the title of the talk has been raised by Hans Frauenfelder over 20 years ago [1]. When studying the ligand-rebinding kinetics of myoglobin, Frauenfelder discovered that below the room temperature, at which the protein dynamics limit the rebinding rate, the reaction kinetics obeys a power law or a stretched exponent [2]. In order to explain this fact, he supposed that the protein energy landscape (EL) has a great number of local minima corresponding to conformational substates (CSs) with nearly the same energies. With respect to the transition rates between CSs, the local minima were assumed to be clustered into hierarchically embedded basins of minima: the smaller basins separated by smaller activation barriers are pooled into larger basins that are separated by higher barriers. In other words, Frauenfelder suggested that the protein CSs and the protein EL clearly do exhibit some taxonomic order. Since hierarchical taxonomy can be described using non-Archimedean (ultrametric) distances, i.e. distances satisfying the strong triangle inequality, an ultrametric space is introduced to describe the protein CSs. Hence, the protein dynamics are associated with an ultrametric random process. The term "protein ultrametricity"

should be understood in the same sense.

Frauenfelder's hypothesis, which has attracted a great deal of interest [3,4], is regarded as one of the most profound ideas put forward to explain the nature of protein attributes that has been proposed in the last decades. To date, however, no theoretical validation of protein ultrametricity has been found that would be accepted by the whole scientific community. In earlier theoretical works [5,6], some toy models were proposed to describe a random walk over an ultrametric space (ultrametric diffusion), but these models were confronted with difficulties in applications to the ligand-rebinding kinetics of myoglobin. More consistent ultrametric approaches were developed in [7,8], where the p -adic pseudo-differential equation of ultrametric diffusion of the form

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int_{Q_p} |x - y|_p^{-(\alpha+1)} [f(y, t) - f(x, t)] d_p y \quad (1)$$

were used to describe the protein dynamics. It was shown in [7,8] that the specific features of the ligand-rebinding kinetics of myoglobin can be understood on the basis of Frauenfelder's hypothesis on the protein ultrametricity.

In this talk we discuss the spectral diffusion in deeply frozen proteins in the same context. In this case, such classical problems of the probability theory as the distribution of the first passage times and the passage numbers are arisen for ultrametric diffusion. The solution of these problems we present in a separate talk. As the results, we show that unfamiliar features of spectral diffusion in proteins also can be described on the basis of ultrametricity of protein dynamics.

Thus, the p-adic equation of ultrametric diffusion offers a simple and relevant description of protein dynamics on a large range of protein motion scales. It is interesting to note that, since the hierarchy of transition rates given by the p-adic equation (1) describes the dynamics of native proteins surprisingly accurately, the protein CS-basins and the protein EL should exhibit the hierarchical self-similarity. This theoretical observation may be of great importance for a deeper understanding of the nature of protein ordering.

This research was partially supported by the RFBR (grants No: 05-03-32563a, 07-02-00612a) and the Program OCHNM RAS (1-OCH/06-07).

References

1. H. Frauenfelder, *Annals of the New York Academy of Sciences* 504, 151 (1987).
2. A. Anzari, J. Berendzen, S. F. Bowne, H. Frauenfelder, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder, and R. D. Young, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 82, 5000 (1985).
3. H. Frauenfelder, S. G. Sligar, and P. G. Wolynes, *Science* 254, 1598 (1991).
4. H. Frauenfelder, *Nature Struct. Biol.* 2, 821 (1995).
5. T. Ogielski and D. L. Stein, *Phys. Rev. Lett.* 55, 1634 (1985).
6. A. Blumen, J. Klafter, and G. J. Zumofen, *J. Phys. A: Math. Gen.* 19, L77 (1986).
7. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, and V. A. Osipov, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35, 177 (2002).
8. V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, and V. Al. Osipov, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36, 4239 (2003).

О распределении времени первого возвращения и числа возвратов для ультраметрического случайного блуждания

В. А. Аветисов

Институт химической физики РАН, Россия

avetisov@chph.ras.ru

А. Х. Бикулов

Институт химической физики РАН, Россия

bikulov1903@rambler.ru

А. П. Зубарев

*Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия*

apzubarev@mail.ru

В последнее время вырос интерес к ультраметрическим случайным процессам и их физическим приложениям, в частности, при описании динамики и эволюции сложных систем биологического происхождения, для которых характерны многомерные сильно пересеченные энергетические ландшафты с астрономически большим числом локальных минимумов. Как было показано недавно [1], для некоторых биологических систем, в частности, для белков, динамику системы разумно приближать случайными «прыжками» между локальными минимума ландшафта, предполагая, что существенную роль при этом играет только максимальный активационный барьер на ландшафте, разделяющий эти локальные минимумы. В этом случае локальные минимумы объединяются в «бассейны» минимумов вложенные друг в друга иерархическим образом и, соответственно, динамика системы описывается в терминах случайных «прыжков» между бассейнами. В работах последних лет было показано [2], что подобное приближение естественно описывать ультраметрическими случайными процессами, при этом оказалось, что p -адическое псевдодифференциальное уравнение ультраметрической диффузии, введенное в [3] и названное там уравнением броуновского движения на p -адической прямой, наиболее правильно описывает динамику белка.

Физически значимое приложение уравнения ультраметрической диффузии требует решения вопросов связанных с описанием наблюдаемых в контексте конкретных экспериментов. Следует заметить, что в реальном эксперименте наблюдение ведется лишь за некоторой определенной степенью свободы сложной системы, выделенной из большого числа степеней

свободы системы самым методом измерения. В одних случаях, наблюдаемая отвечает усредненной по всем состояниям характеристике системы, а в других случаях, она относится только к очень определенным состояниям. В последнем случае, в отношении ультраметрической диффузии возникают такие классические задачи теории вероятности, как задача о распределении времен первого возвращения и задача о числе возвращений.

В данной работе рассматривается однородный марковский процесс $\xi(t)$ на ультраметрическом пространстве Q_p (ультраметрическое случайное блуждание) [2], плотность распределения которого, $\varphi(x, t)$, $x \in Q_p$, $t \in R_+$, удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) = -D_x^\alpha \varphi(x, t).$$

В физической литературе данное уравнение принято называть уравнением ультраметрической диффузии. Мы рассматриваем определенный случайный процесс $\xi(t)$, а именно тот, плотность распределения которого удовлетворяет задаче Коши для уравнения ультраметрической диффузии с начальной плотностью распределения в области $Z_p \subset Q_p$. Основным результатом работы заключается в построении и исследовании случайной величины τ_{Z_p} имеющей смысл момента времени первого возвращения траекторий случайного процесса $\xi(t)$ в область Z_p . Для исследования этой задачи, мы сначала доказываем, что плотность распределения $f(t)$ момента времени первого возвращения τ_{Z_p} удовлетворяет неоднородному уравнению Вольтерра

$$g(t) = \int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau + f(t),$$

где $g(t) = -\frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{Q_p \setminus Z_p} \frac{\varphi(x, t)}{|x|_p^{\alpha+1}} dx$, $\Gamma_p(-\alpha)$ - p -адическая гамма-функция.

Затем мы строим решение этого уравнения и исследуем его свойства. Мы также показываем, что функция $f(t)$ представляется в виде функционала от функции плотности распределения, которая является решением уравнения ультраметрической диффузии с поглощающей областью в Z_p . В заключительной части работы исследуем задачу о числе возвращений за время от 0 до t . Мы выводим рекуррентное уравнение для вероятности $q^{(m)}(t)$ m -го возвращения за интервал времени от 0 до t . Также, выводится рекуррентное уравнение для вероятности $h^{(m)}(t)$, ровно m возвращений за интервал времени от 0 до t . Исследуются свойства функций $q^{(m)}(t)$ и $h^{(m)}(t)$. Получена формула для среднего числа возвращений за интервал времени от 0 до t и ее асимптотические оценки для больших t .

Литература

1. H. Frauenfelder, Annals of the New York Academy of Sciences 504, 151 (1987); H. Frauenfelder, S. G. Sligar, and P. G. Wolynes, Science 254, 1598 (1991); H. Frauenfelder, Nature Struct. Biol. 2, 821 (1995).

2. Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Kozyrev S.V., Osipov V.A., *p*-Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained by Hierarchical Energy Landscapes. J.Phys. A: Math. Gen., 35 (2002) 177; Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Kozyrev S.V., Application of *p*-adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry, Journal of Physics A, 1999. Vol.32, p. 8785; Avetisov V.A., Bikulov A.Kh., Osipov V.A. *p*-adic description of characteristic relaxation in complex systems. J. Phys. A: Math. Gen. 36, 2003, 4239.

3. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. *p*-адический анализ и математическая физика. - М.: Физматлит, 1994, 352 с.

Renormalized higher powers of white noise and current algebras

L. Accardi

Rome University, Italy

accardi@volterra.uniroma2.it

The program to introduce renormalized powers of white noise was initiated by Accardi, Lu and Volovich in 1999. These authors introduced a new renormalization for these powers and gave a direct construction of the corresponding Fock representation for the renormalized square of white noise (RSNW). In 2000 Accardi, Franz and Skeide discovered that the three non standard Meixner laws (Gamma, Negative binomial, Meixner) play for the RSNW the Gauss and Poisson law play for the first order noise (i.e. vacuum distributions of generalized field operators).

The program to go beyond the square and to attack higher powers had to overcome the obstacle of the no-go theorems. In a series of papers Accardi and Boukas introduced still another renormalization and proved that the resulting Lie algebra, after appropriate closure becomes the Virasoro–Zamolodchikov W_∞ -Lie algebra.

The analogy with the Virasoro algebra head us to investigate the existence of Hilbert space representation not of the algebra itself but of some of its central extensions.

I will review the main steps of this development with special emphasis on the connections between the representation theory of infinite dimensional Lie algebras and the theory of infinitely divisible processes.

Предельный переход под знаком интеграла Лебега для переменных мер

В. А. Алякин

Самарский государственный университет, Россия

aval@ssu.samara.ru

Д. Э. Клепнёв

Самарский государственный университет, Россия

dekl@ssu.samara.ru

Известна теорема Г. Я. Арешкина [1], обобщающая классическую теорему Витали о предельном переходе под знаком интеграла Лебега на случай переменной меры. В отличие от теоремы Витали, где требуется сходимость последовательности подынтегральных функций по мере, теорема Арешкина накладывает на последовательность подынтегральных функций сильное условие сходимости всюду. Возникает вопрос, можно ли в теореме Арешкина ослабить это ограничительное условие?

Теорема 1 показывает, что условие сходимости всюду в теореме Арешкина можно заменить условием сходимости по всем интегрирующим мерам. Из теоремы 2 и примеров видно, что если заменить в теореме Арешкина сходимость всюду сходимостью по предельной мере, условие равностепенной абсолютной непрерывности остаётся достаточным для предельного перехода, но перестаёт быть необходимым.

Определение. Последовательность неопределённых интегралов $\{\int f_k d\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого множества E и любого k из выполнения условия $\mu_k E < \delta$ следует $|\int_E f_k d\mu_k| < \varepsilon$.

Теорема 1. Пусть \mathcal{F} — σ -алгебра с единицей X ; $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность конечных неотрицательных σ -аддитивных мер на \mathcal{F} ; для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k E = \mu_0 E$; $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность конечных \mathcal{F} -измеримых функций на X ; для каждого целого $k \geq 1$ функция f_k μ_k -интегрируема.

Пусть для всякого n последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f_0 по мере μ_n . Тогда для того, чтобы f_0 была μ_0 -интегрируемой и для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнялось

$$\int_E f_0 d\mu_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu_k,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность неопределённых интегралов $\{\int f_k d\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 2. Пусть \mathcal{F} — σ -алгебра с единицей X ; $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность конечных неотрицательных σ -аддитивных мер на \mathcal{F} ; для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k E = \mu_0 E$; $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность конечных \mathcal{F} -измеримых функций на X ; для каждого целого $k \geq 1$ функция f_k μ_k -интегрируема.

Пусть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к f_0 по мере μ_0 . Тогда для того, чтобы f_0 была μ_0 -интегрируемой и для всякого множества $E \in \mathcal{F}$ выполнялось

$$\int_E f_0 d\mu_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu_k,$$

достаточно, чтобы последовательность неопределённых интегралов $\{\int f_k d\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ была равностепенно абсолютно непрерывной относительно последовательности мер $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Имеется пример, показывающий, что в теореме 2 условие равностепенной абсолютной непрерывности не является необходимым.

Список литературы

- [1] Арешкин Г. Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона / Г. Я. Арешкин // Сообщ. АН Груз. ССР. — 1949. — Т. 10. — № 2. — С. 69–76.

Ассоциированные гипергеометрические функции Гаусса и их применение при решении задач Коши, Гурса для системы уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу

А. А. Андреев

Самарский государственный университет, Россия

andre@ssu.samara.ru

Синтез и распределение полимерных микро- и наночастиц в плазмохимической системе с искусственной гравитацией

А. В. Андреева

Самарский государственный педагогический университет, Россия

Andreeva.83@inbox.ru

В. И. Зынь

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,

Россия

zyn37@mail.ru

И. Куцарев

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,

Россия

Гравитационный дрейф полимерных кластеров создает специфические вертикальные распределения и самих частиц, и полной массы полимера, заключенного в них [1], что наводит на мысль о возможности использования эффекта как метода исследования дисперсной фазы путем измерения параметров полимерного профиля.

Основу теоретической модели, представленной здесь и более подробно в [2], составляет гипотетический механизм дрейфа частиц, учитывающий непрерывный рост частиц в разряде и их падение, ограниченное силой сопротивления остаточного газа. Концентрацию молекул мономера n считаем постоянной, следовательно, в каждой точке плазмы дивергенция полной плотности полимера равна скорости его производства, что является лишь вербальной формулировкой уравнения неразрывности для плотности полимера. Размер частицы зависит от времени или длины ее падения в разряде, $Z - Z_0$, где Z_0 – координата зародыша частицы, где она начинает заметно чувствовать гравитацию, Z – текущая координата. Таким образом, частицы, зарождающиеся на разных высотах Z_0 , по достижении одной и той же координаты Z , будут иметь разные размеры (рис.1). По существу, в принятой модели разряд представляет собой активное пространство с распределенными источниками полимера. Разряд поглощает молекулы мономера извне и производит частицы полимера, которые падают из каждой точки разряда под действием силы тяжести.

Массовый баланс полимера в произвольной точке активной зоны задается уравнением неразрывности, которое в стационарном режиме имеет вид:

$$\rho \cdot \frac{du}{dZ} + \frac{d\rho}{dZ} \cdot u = f, \quad (1)$$

где f – удельная скорость рождения полимерной массы, u – скорость дрейфа частицы, ρ – массовая плотность полимера. Далее, обозначив размер частицы через N , а ее массу через $M = mN$, получим

$$f = b \cdot S \cdot n(N) \cdot J \cdot m = \pi \cdot (R + r)^2 \cdot b \cdot n(Z, Z_0) \cdot m \cdot n \cdot \nu, \quad (2)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{f}{m} - k \cdot N = b \cdot n \cdot \nu \cdot \pi \cdot r^2 \cdot a^2 \cdot N^{2/3} - k \cdot N = A \cdot N^{2/3} - k \cdot N, \quad (3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{F}{M} + g = g - \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 \cdot \frac{\gamma \cdot \nu \cdot n \cdot m \cdot u}{M} = g - \frac{4\gamma \cdot k}{3b[1 - \exp(-\frac{k \cdot t}{3})]} \cdot u \quad (4)$$

Система (1)–(4) была решена совместно, что позволило найти функцию распределения полной массы полимера по высоте Z (рис.2), а из нее некоторые другие функции распределения и представления рассматриваемой системы, как, например, распределение полимерной массы на фиксированной высоте Z по гипотетически переменной величине ускорения свободного падения g (рис.3) и по частицам размера N (рис.4).

Найденные результаты позволяют практически реализовать новый экспериментальный подход, использующий искусственную силу тяжести (центробежную) для проявления основных массовых и счетных распределений в системе полимерных аэрозолей, образующихся в разряде. Разработана экспериментальная методика получения дисперсной полимерной среды с помощью тлеющего разряда в условиях искусственной гравитации (поле инерционных сил центрифуги) и ее макроскопического образа в виде поперечного профиля пленки, осаждающейся на плоской подложке. Создана соответствующая установка с разрядными ячейками на центрифуге.

Список литературы

- [1] А.М. Штеренберг, В.К. Потапов. Макрокинетика формирования дисперсной фазы в газоразрядных системах. Самара: СамГТУ, 1997, 192 с.
- [2] V.I. Zyn, European Physical Journal E–Soft Matter **V. 25. № 1**, 51(2008).

Устойчивость решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных

А. В. Анкилов,

Ульяновский государственный технический университет, Россия
ankil@ulstu.ru

П. А. Вельмисов

Ульяновский государственный технический университет, Россия
velmisov@ulstu.ru

Исследуется динамическая устойчивость упругих элементов (пластин, стержней) тонкостенных конструкций, находящихся во взаимодействии с потоком идеального газа (жидкости). Скорости движения среды предполагаются дозвуковыми. Учитывается запаздывание по времени реакции оснований элементов.

Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение материала пластин и оснований описывается как линейными, так и нелинейными моделями упругого тела. Аэрогидродинамическая нагрузка определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики.

В результате решения аэрогидродинамической части задачи давление газа или жидкости на элементы определяется через функции деформаций этих элементов. Решение соответствующих задач аэрогидроупругости сводится к исследованию систем связанных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций прогибов.

Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенных функционалов, соответствующих этим системам уравнений. Полученные условия устойчивости движения упругих элементов налагают ограничения на скорость потока, значения сжимающих(растягивающих) усилий, жесткость пластин и оснований, коэффициенты демпфирования, а также другие параметры механических систем.

Рассматриваются задачи обтекания: пластин; крыловых профилей различной конфигурации; каналов, через которые протекает жидкость; трубопроводов. Количество и места расположения упругих элементов произвольные.

Для примера приведем в линейной постановке с учетом запаздывания реакции основания простейшую плоскую задачу аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании пластины потоком газа.

Пусть на плоскости xOy , в которой происходят совместные колебания упругой пластины и газа, пластине соответствует на оси Ox отрезок $[0, l]$. В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Введем обозначения: $w(x, t)$ – прогиб пластины и $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока газа. Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus [0, l],$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = w_t(x, t) + Vw_x(x, t), \quad x \in [0, l],$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 \equiv (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0.$$

$$Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0w(x, t - \tau) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) + \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (0, l),$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по соответствующей переменной; штрих обозначает производную по x , а точка – производную по t ; $\rho, D, M, N, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ – постоянные параметры системы; τ – время запаздывания.

Решение задачи можно свести к исследованию интегро-дифференциального уравнения в частных производных для неизвестной функции деформации пластины:

$$Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0w(x, t - \tau) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(x_1, t) + V\dot{w}'(x_1, t)) K(x_1, x) dx_1 - \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(x_1, t) + Vw'(x_1, t)) \frac{\partial K(x_1, x)}{\partial x} dx_1, \quad x \in (0, l),$$

$$K(x_1, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x(l-x_1)} + \sqrt{x_1(l-x)}}{\sqrt{x(l-x_1)} - \sqrt{x_1(l-x)}} \right|, \quad x_1 \neq x,$$

для которого построен функционал и получены условия устойчивости.

Аналитические решения в AMZ - PTY и $ABKM$ полевых струнных теориях

И. Я. Арефьева

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия
arefeva@mi.ras.ru

Р. В. Горбачев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия
gorbachev@mi.ras.ru

П. Б. Медведев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия

Аналитические решения описывающие тахионную конденсацию в струнной полевой теории [1] активно изучаются, начиная с основополагающей работы Шнабла [2]. В докладе будут представлено построение решений [3] в $ABKM$ полевой теории NSR фермионной струны [4], описывающих тахионную конденсацию, а также их связь с решениями в AMZ - PTY теории [5, 6], построенными в [7] (см. также [8]).

Ковариантная AMZ - PTY полевая теория NSR струны в NS секторе, преодолевающая трудности первоначального подхода Виттена [1] и имеющая действие типа Черна-Саймонса [5, 6], имеет в качестве уравнений движения в $GSO(+)$ NS -секторе уравнение нулевой кривизны

$$Q\Psi + \Psi \star \Psi = 0 \quad (1)$$

Здесь Ψ элемент струнной алгебры снабженный умножением \star и оператором дифференцирования Q . \star и Q удовлетворяют естественным свойствам, в частности, условию Лейбница $Q(\Psi_1 \star \Psi_2) = Q\Psi_1 \star \Psi_2 + (-1)^{|\Psi_1|} \Psi_1 \star Q\Psi_2$, где $|\Psi|$ четность элемента Ψ (см. обзор [9]). Представление нулевой кривизны $\Psi = \Omega^{-1}Q\Omega$, где Ω - четный элемент струнной алгебры, является решением (1) в силу равенства $Q\Omega^{-1} = -\Omega^{-1}(Q\Omega)\Omega^{-1}$. При специальной параметризации эта формула совпадает с пертурбативной формулой [3] и является основой для построения вакуумных решений, описывающих конденсацию тахиона бозонной струны, причем аномальная часть этих решений дает вклад в действие [2, 10].

Тахионная конденсация в NSR струне описывается с помощью подключения к AMZ - PTY полевой теории $GSO(-)$ сектора и уравнения движения в этой теории [4] имеют вид

$$Q\Phi_+ + \Phi_+ \star \Phi_+ - \Phi_- \star \Phi_- = 0, \quad Q\Phi_- + \Phi_+ \star \Phi_- - \Phi_- \star \Phi_+ = 0 \quad (2)$$

Представление, являющееся аналогом условия нулевой кривизны для уравнения (2) построено с [3] и оказывается, что оно является таковым при использовании матричнозначного вида струнных полей и матричного BRST заряда [11]

$$\widehat{\Phi} = \Phi_+ \otimes \sigma_3 + \Phi_- \otimes i\sigma_2, \quad \widehat{Q} = Q \otimes \sigma_3 \quad (3)$$

где σ_i - матрицы Паули. При этом система (3) имеет вид

$$\widehat{Q}\widehat{\Phi} + \widehat{\Phi} \star \widehat{\Phi} = 0 \quad (4)$$

Представление нулевой кривизны

$$\widehat{\Phi} = e^{-\Lambda_+ \otimes I} e^{\Lambda_- \otimes \sigma_1} Q \otimes \sigma_3 e^{-\Lambda_- \otimes \sigma_1} e^{\Lambda_+ \otimes I}, \quad (5)$$

где Λ_+ -четное, Λ_- -нечетное при определенной параметризации дает пертурбативные решения, построенные в [3]. Будет продемонстрировано, что тахионная конденсация происходит на аномальной части этих пертурбативных решений.

Список литературы

- [1] E. Witten, “Interacting field theory of open superstrings”, Nucl. Phys. B276 (1986) 291.
- [2] M. Schnabl, “Analytic solution for tachyon condensation in open string field theory”, Adv. Theor. Math. Phys. 10 (2006) 433–501.
- [3] I. Y. Aref’eva, R. V. Gorbachev and P. B. Medvedev, “Tachyon Solution in Cubic Neveu-Schwarz String Field Theory,” arXiv:0804.2017 [hep-th].
- [4] I.Ya. Aref’eva, A.S. Koshelev, D.M. Belov, P.B. Medvedev, *Tachyon condensation in cubic superstring field theory*, Nucl.Phys.B 638 (2002) 3.
- [5] I. Y. Arefeva, P. B. Medvedev, and A. P. Zubarev, *Background Formalism For Superstring Field Theory*, Phys.Lett.B 240 (1990) 356;
I. Y. Arefeva, P. B. Medvedev, and A. P. Zubarev, “New representation for string field solves the consistence problem for open superstring field”, Nucl. Phys. B341 (1990) 464–498.
- [6] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn, and S. A. Yost, “Superstring field theory”, Nucl. Phys. B337 (1990) 363–433.
- [7] T. Erler, *Tachyon Vacuum in Cubic Superstring Field Theory*, JHEP 0801 (2008) 013.
- [8] E. Fuchs and M. Kroyter, “On the classical equivalence of superstring field theories,” arXiv:0805.4386.
- [9] I. Y. Arefeva, D. M. Belov, A. A. Giriyavets, A. S. Koshelev, and P. B. Medvedev, “Noncommutative field theories and (super)string field theories”.

- [10] Y. Okawa, “Comments on Schnabl’s analytic solution for tachyon condensation in Witten’s open string field theory,” JHEP **0604**, 055 (2006).
- [11] I. Y. Arefeva, D. M. Belov, and A. A. Giryavets, “Construction of the vacuum string field theory on a non-BPS brane”, JHEP 09 (2002) 050.

Перепутывание в модели Тависа-Каммингса, индуцированное тепловым шумом

Е. К. Башкиров, М. П. Ступацкая

Самарский государственный университет, Россия

`bash@ssu.samara.ru`

Квантовые перепутанные состояния играют ключевую роль в квантовой теории информации, физике квантовых вычислений, квантовой связи и квантовой криптографии. Перепутанность представляет собой особую квантовую форму корреляций, отличную от классических корреляций, и связанную с когерентными суперпозиционными состояниями составных систем. Для приложений в квантовой информатике, квантовых вычислениях, квантовой телепортации и др. нужны максимально перепутанные чистые состояния. Однако в реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно приводит к декогерентности, что ограничивает возможности использования квантовых объектов в качестве логических элементов квантовых компьютеров. Однако в некоторых случаях оно может являться источником перепутывания. В частности, атом-атомное перепутывание, например, может возникать в системе двух двухуровневых атомов с однофотонными и различными типами двухфотонных переходов за счет взаимодействия с одно или двухмодовым тепловым полем. В работе одного из авторов настоящего доклада (*E.K. Bashkirov, Laser Phys. Lett., 2006., V.3. P. 145-150*) была показана возможность атом-полевого перепутывания за счет теплового шума в модели двух двухуровневых атомов с невырожденными двухфотонными переходами. При этом при описании динамики модели не учитывалось диполь-дипольное взаимодействие между атомами. Представляет поэтому интерес описание динамики атомного перепутывания в двухатомной невырожденной двухфотонной модели при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия атомов. Заметим, что учет такого взаимодействия в случае однофотонных переходов в двухуровневых атомах проведен в работе Агуйара с соавторами (*L.S. Aguiar et al., J. Opt. B, 2005, V.7, P. S769-S771*), а в случае двухфотонных вырожденных переходов - в работе Лиао с соавторами (*X.-P. Liao et al, Chinese Phys. B, 2008, V.17, P.2137-2142*).

В настоящем докладе нами исследована модель двух двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с двумя невырожденными модами квантового теплового электромагнитного поля в идеальном двухмодовом резонаторе, с учетом диполь-дипольного взаимодействия между атомами. Для рассматриваемой модели нами найдено точное выражение для оператора эволюции и с его помощью получена редуцированная атомная матрица плотности в стандартном двухатомном базисе, необходимая для исследования перепутывания атомных состояний в случае начального смешанного состояния всей системы. Анализ собственных значений частично транспонированной матрицы плотности позволило нам получить аналитические выражения для параметра Переса-Хородецких, определяющего степень атом-атомного перепутывания для двухкубитных систем, используя различные чистые начальные состояния атомной подсистемы. Численное моделирование полученных выражений для различных значений параметров модели и различных начальных состояний атомов показало, что степень атом-атомного перепутывания, возникающего за счет теплового шума, для случая невырожденного двухфотонного взаимодействия может превосходить соответствующую величину для однофотонных переходов. Показано также, что прямое диполь-дипольное взаимодействие двухуровневых атомов приводит к увеличению степени атомного перепутывания.

Случайные процессы в Q_p ассоциированные с с линейными и нелинейными системами PIDE

Я. И. Белопольская

*Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет, Россия*

yanabeus@yahoo.com

Связь между теорией интегро-дифференциальных уравнений PIDE относительно функций, заданных на поле p - адических чисел Q_p и теорией случайных процессов в Q_p исследовалось многими авторами (см. монографию Кочубея [1]). В работе [2] был построен случайный процесс, ассоциированный с нелинейным PIDE, с нелинейностью вида $u^{1+\beta}$, $\beta < 1$. В настоящей работе изучается связь между задачей Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и случайными процессами в Q_p а также их мультипликативными функционалами.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u_i}{\partial s} + \int_{Q_p} [u_i(s, x + f(x, z)) - u_i(s, x)]\pi(dz) + \sum_{j=1}^d c_{ij}(x, u(s, x))u_j(s, x) + (1)$$

$$\int_{Q_p} \sum_{j=1}^d C_{ij}(x, u(s, x), z) u_j(s, x + f(x, z)) \pi(dz) = 0, \quad u_i(T, x) = u_{0i}(x)$$

Здесь $0 \leq s \leq T$ и мера $\pi(dz)$ на Q_p имеет вид

$$\pi(dz) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \|z\|_p^{-\alpha-1} dz, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

где dz – мера Хаара на Q_p , и $\int_{Q_p \setminus \{0\}} \pi(dz) < \infty$. Мы предполагаем, что коэффициенты $f : Q_p \times Q_p \rightarrow Q_p$, $c : Q_p \times R^d \rightarrow R^d \times R^d$, $C : Q_p \times R^d \times Q_p \rightarrow R^d \times R^d$ интегрируемы по мере $\pi(dz)$ и липшицевы по аргументам $x \in Q_p$ и $u \in R^d$. При этом c, C допускают полиномиальный рост по $u \in R^d$ и ограничены по $x \in Q_p$.

Для решения этой задачи мы конструируем случайный процесс $\xi(t)$ в Q_p , удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$d\xi(t) = \int_{Q_p} f(\xi(t), z) \nu(dt, dz), \quad \xi(s) = x \in Q_p, \quad s \leq t. \quad (3)$$

Здесь $\nu(dt, dz)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times Q_p$ с параметром $E\nu(dt, dz) = \pi(dz)dt$. Уравнения такого вида были исследованы в [1]. Затем мы конструируем мультипликативный операторный функционал $T(t, s, \xi(\cdot))$ от процесса $\xi(t)$ удовлетворяющего (1), задаваемый по формуле $T(t, s, \xi(\cdot))h = \eta(t)$, $h \in R^d$, где $\eta(t)$ – решение линейного стохастического уравнения вида

$$d\eta(t) = c(\xi(t), u(t, \xi(t)))\eta(t)dt + \quad (4)$$

$$\int_{Q_p} C(\xi(t), u(t, \xi(t)), z)\eta(t)\nu(dt, dz) \quad \eta(s) = h \in R^d.$$

Наконец, полагая

$$\langle h, u(s, x) \rangle = E\langle \eta(T), u_0(\xi(T)) \rangle, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (5)$$

мы получаем замкнутую систему уравнений. В работе формулируются условия при которых существует единственное решение системы (2)–(4). Далее изучаются свойства этого решения и доказывается, что функция $u(s, x)$ заданная соотношением (5) представляет единственное решение задачи Коши (1).

Работа поддержана грантами DFG 436 RUS 113/809 и грантом РФФИ 05-01-04002-NNIO-а.

Литература

1. A. Kochubei, Pseudo-differential equations and stochastics over non-archimedean fields. Marcel Dekker Inc. 2001.

Квантование и некоторый диффузионный процесс в фазовом пространстве

Е. М. Бениаминов

Российский государственный гуманитарный университет, Россия

ebeniamin@yandex.ru

Рассматривается математическая модель процесса, состояние которого в каждый момент времени задается волновой функцией – комплекснозначной функцией $\varphi(x, p)$, где $(x, p) \in R^{2n}$, и n – размерность конфигурационного пространства. В отличие от квантовой механики, где волновая функция зависит только от координат или только от импульсов, в нашем случае волновая функция зависит и от координат, и от импульсов. По аналогии с квантовой механикой, предполагается, что для волновых функций выполняется принцип суперпозиции, и плотность вероятности $\rho(x, p)$ на фазовом пространстве, соответствующая волновой функции $\varphi(x, p)$, задается стандартной формулой

$$\rho(x, p) = \varphi^*(x, p)\varphi(x, p) = |\varphi(x, p)|^2. \quad (1)$$

Предполагается, что изменение функции $\varphi(x, p, t)$ во времени задается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) - \frac{i}{\hbar} \left(H - \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} p_k \right) \varphi + \Delta_{a,b} \varphi, \quad (2)$$

$$\text{где} \quad \Delta_{a,b} \varphi = a^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ip_k}{\hbar} \right)^2 \varphi + b^2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_k^2} \varphi + \frac{abn}{\hbar} \varphi; \quad (3)$$

$H(x, p)$ – функция Гамильтона системы; a^2 и b^2 – коэффициенты диффузий по координатам и импульсам, соответственно.

Это линейное уравнение описывает классический диффузионный процесс в фазовом пространстве, в котором каждый комплексный вектор волновой функции $\varphi(x, p)$ одновременно находится в 3 -х движениях. Точка приложения комплексного вектора движется по классической траектории, заданной функцией Гамильтона $H(x, p)$, возмущенной случайными скачками по координатам и импульсам с постоянными коэффициентами диффузий a^2

и b^2 . Кроме того, каждый комплексный вектор, точка приложения которого движется по траектории, заданной описанными выше двумя движениями, вращается с большой постоянной угловой скоростью $\omega = mc^2/\hbar$ в системе координат, связанной с этой точкой, где m – масса частицы, c – скорость света, \hbar – постоянная Планка. При этом волновой вектор $\varphi(x, p, t)$ в точке (x, p) в момент времени t по принципу суперпозиции равен сумме волновых векторов, заданных распределением векторов $\varphi(x, p, 0)$ в начальный момент времени и попавших в результате описанных выше движений в точку (x, p) в момент времени t .

Анализ дифференциального уравнения (2), (3) показывает, что движение в модели раскладывается на быстрое и медленное. В результате быстрого движения система, начиная с произвольной волновой функции на фазовом пространстве, переходит к функции, принадлежащей некоторому особому подпространству. Элементы этого особого подпространства соответствуют волновым функциям, зависящим только от координат. Медленное движение, начинающееся с ненулевой волновой функции из этого подпространства, происходит далее по подпространству и описывается уравнением Шредингера.

В работе, исходя из предположений о тепловой причине диффузий делается оценка коэффициентов диффузий и времени переходного процесса от классического описания процесса, в котором принцип неопределенности Гейзенберга может не выполняться, к квантовому, в котором принцип Гейзенберга уже выполняется. Время переходного процесса имеет порядок $\hbar/(kT) \approx 1/T \cdot 10^{-11}$ сек, где k – постоянная Больцмана, T – температура среды.

Кулоновская функция Грина для уравнения Дирака

В. А. Билык

*Тольяттинский государственный университет,
Физико-технический институт*

bilyk@tltsu.ru

В докладе рассматривается задача о построении интегрального представления для кулон-дираковской функции Грина $G(E)$ в импульсном пространстве. Развитый подход является обобщением известного метода построения нерелятивистской кулоновской функции Грина, разработанного

Окубо и Фельдманом [1]. Исходное релятивистское уравнение Липпмана-Швингера для матричных элементов оператора $\Phi(E) \equiv G(E)V$

$$\Phi(\vec{p}_0, \vec{p}; E) = \frac{\lambda}{2\pi^2 c^2} \frac{E + c(\vec{\alpha}, \vec{p}_0) + mc^2 \beta}{(K^2 - p_0^2) |\vec{p}_0 - \vec{p}|^2} + \frac{\lambda}{2\pi^2 c^2} \frac{E + c(\vec{\alpha}, \vec{p}_0) + mc^2 \beta}{K^2 - p_0^2} \int_{\mathbf{R}^3} d\vec{q} \frac{\Phi(\vec{q}, \vec{p}; E)}{|\vec{p}_0 - \vec{q}|^2}, \quad (1)$$

где $K^2 = (E/c)^2 - (mc)^2$, $\Im(K^2) > 0$, сводится к более простой системе уравнений для компонент φ_0 и φ , вводимых с помощью интегрального представления

$$\Phi(\vec{p}_0, \vec{p}; E) = - \int_0^\infty \int_0^\infty z \exp \left\{ -ixz (p_0^2 - K^2) - iz |\vec{p}_0 - \vec{p}|^2 \right\} \times ([E + mc^2 \beta + c(\vec{\alpha}, \vec{p}_0)] \varphi_0(x, z, \vec{p}) + \varphi(x, z, \vec{p})) dx dz. \quad (2)$$

Показано, что решение такого типа с функциями φ_0 и φ , не зависящими от импульса \vec{p}_0 , существует. В нерелятивистском пределе решение (2) сводится к интегральному представлению Окубо-Фельдмана-Швингера для кулоновской функции Грина [1, 2]. Построено выражение для G , родственное полурелятивистской кулоновской волновой функции Зоммерфельда-Мауэ-Фарри [3, 4] и другие приближения, полезные при описании процессов рассеяния, в которых определяющую роль играют эффекты кулоновского дальнего действия. Примерами могут служить задачи о движении релятивистского электрона в суперпозиции полей кулоновского центра с большим зарядом и других рассеивателей, многочастичная кулоновская задача с приближенным учетом релятивистских эффектов. В таких задачах требуется точное воспроизведение характерного асимптотического поведения кулоновской волновой функции и функции Грина, и использование приближений в виде отрезков парциальных разложений неприемлемо.

В этом аспекте рассмотрение релятивистской и нерелятивистской кулоновских задач существенно отличается, т. к. точное решение уравнения Дирака в кулоновском случае может быть получено с помощью метода разделения переменных только в сферических координатах и записано в виде бесконечного разложения по парциальным волнам, в то время как кулоновская задача для уравнения Шредингера допускает разделение переменных еще и в параболических координатах. Это дает, в частности, относительно простое решение Гордона ψ_{NR}^\pm — замкнутое выражение для волновой функции непрерывного спектра в терминах ${}_1F_1$ — для которого развиты эффективные методы расчета матричных элементов вида $\langle \psi_{NR}^\pm | U | f \rangle$.

References

- [1] Okubo S. and Feldman D. *Some aspects of the covariant two-body problem. II. The scattering problem* // Phys. Rev. **117** (1960) p. 292
- [2] Schwinger J. *Coulomb Green's function* // Phys. Rev. **5** (1964) p. 1606
- [3] Sommerfeld A. and Maue A. W. *Approximate adaptation of a solution of the Schrödinger equation to the solution of Dirac equation* // Ann. Physik **22** (1935) p. 629
- [4] Furry W. H. *Approximate wave functions for high energy electrons in Coulomb fields* // Phys. Rev. **46** (1936) p. 391

Условия фазового перехода первого рода в минимальной суперсимметричной модели

А. О. Борисов

Самарский государственный университет, Россия

andborisov@rambler.ru

Феноменологически, описание генерации барионной асимметрии на электрослабых масштабах - электрослабом бариогенезисе, на ранних этапах развития Вселенной, после фазового перехода, сводится к вычислению методом ВКБ-приближения вероятности туннелирования ложного вакуума в истинный при такой комбинации параметров теории, чтобы обеспечить невымывание барионного нарушения [1]. Чтобы реализовать такую ситуацию, необходимо потребовать, чтобы сам фазовый переход, приводящий к барионной асимметрии, был переходом первого рода. Тогда оказывается, что в теории Вайнберга-Салама это сводится к выполнению условия

$$\frac{\phi(T_c)}{T_c} \geq 1.0, \quad (1)$$

где $\phi(T_c)$ и T_c - соответственно величина скалярного конденсата (поля Хиггса) и температура в момент фазового перехода, которое связано с ограничением на массу m_h скалярного конденсата

$$\frac{\phi(T_c)}{T_c} \sim \frac{4Ev^2}{m_h^2} \quad (2)$$

через т. н. кубический коэффициент

$$E_{\text{SM}} = \frac{2}{3} \frac{2m_W^3 + m_Z^3}{4\pi v^3} \sim 9.5 \cdot 10^{-3}. \quad (3)$$

Здесь m_W, m_Z – массовые параметры электрослабых бозонов, v – вакуумное ожидание.

Тогда условие (1) преобразуется в условие для массы бозона Хиггса

$$m_h \sim \sqrt{\frac{4E}{1.3}} \sim 42 \text{ GeV}, \quad (4)$$

противоречащее экспериментальным данным LEP, так что Стандартная модель неспособна сохранять сколь-нибудь раннюю генерацию барионной асимметрии.

В докладе рассматривается расширение Стандартной модели – МССМ, где возможно преодоление этих трудностей. Найдено, какой вид примет условие (1) в МССМ при включении в теорию сектора невырожденных скалярных кварков, и к каким ограничениям на параметры модели это приведет. Получено, что в некоторой области параметров модели удастся обеспечить фазовый переход первого рода. Мотивация рассмотрения сектора скалярных кварков связана с успешным описанием при таком сценарии эффектов CP -нарушения [2].

Список литературы

- [1] Рубаков В. А., Шапошников М. Е., УФН, 166 493 (1996).
- [2] Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов, М.Н. Дубинин // ЭЧАЯ. Том 37. Вып.5, 1285 (2006); E.N. Akhmetzyanova, M.V. Dolgoplov, M.N. Dubinin // Phys. Rev. D 71, 075008 (2005). Э. Н. Ахметзянова, М. В. Долгополов, М. Н. Дубинин, И. А. Смирнов, ЯФ 68, 569 (2005).

Gravitation and Cosmology within Palatini formalism

A. Z. Borowiec

Institute for Theoretical Physics, University of Wrocław, Poland

borow@ift.uni.wroc.pl

I review and discuss two classes of modified gravity models in a framework of the Palatini first order formalism. Considering metric and torsionless connection as independent dynamical variables provides the Einstein field equations and the Komar energy-momentum tensor for a wide class of gravitational Lagrangians without external matter sources. Differential-geometric almost-product and almost-complex Norden bi-metric structures, ensuing from the Ricci squared Lagrangians will be analyzed. As an application we show that particular examples of such theories can provide, under suitable hypotheses, a theoretical explanation to the present time acceleration of the Universe as well as to its early day inflation.

Временная динамика волновых функций электронов 2D квантового кольца в переменном магнитном поле

А. А. Брызгалов

*Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики, Россия*

sandro185@mail.ru

Ф. И. Карманов

*Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики, Россия*

karmanov@obninsk.ru

В работах [1,2] предложена модель двухмерного квантового кольца с ограниченной шириной, формирующегося в процессе создания полупроводниковых наноматериалов; получены волновые функции электронов для стационарного случая. В данной работе рассматривается временная динамика волновых функций электронов в переменном магнитном поле. В этом контексте рассматриваются:

- Задача о связанных состояниях в квадратичном потенциале и постоянном магнитном поле (уровни Ландау);

- Задача о связанных состояниях электронов квантовых точек и анти-точек в потенциале $V(r) = a_1/r^2 + a_2 \cdot r^2 + V_0$;
- Временная динамика волновых функций при формировании стационарных состояний. Решение такой задачи в данной работе для нестационарного уравнения Шрёдингера выполнено тремя различными методами:
- Численное решение методом прогонки;
- Численное решение методом стрельбы;
- Численно-аналитическое решение методом расщепления по физическим факторам. Решение методом расщепления по физическим факторам в условиях работы [2] может быть получено в аналитической форме в замкнутом виде на временном интервале. Однако аналитическое решение существует только для потенциалов вида $V(r)$. Численное решение позволяет найти характеристики системы в широком классе модельных потенциалов. На основе проведённого сравнения результатов расчёта отмечено, что методы прогонки и стрельбы, дающие численный результат, подтверждают данные, основанные на численно-аналитической методике. Кроме того, оценка сравнительной эффективности каждого из методов свидетельствует в пользу алгоритма, основанного на методе расщепления по физическим факторам.

1 W.-C. Tan and J.C. Inkson. Electron states in a two-dimensional ring - an exactly soluble model. *Semicond. Sci.Technol.*, (1996), p.1635-1641. 2 Y. Avishai, Y Hatsugai and M. Kohomoto. Persistent currents and edge states in magnetic fields. *Phys. Rev. B*47, (1993), p. 9501-9511.

Асимметричная упругость

В. О. Бытев

Тюменский государственный университет, Россия

vbytev@utmn.ru

И. В. Слезко

Тюменский государственный университет, Россия

slezkoirina@rambler.ru

Посредством группового анализа законов сохранения механики сплошных сред [1] установлена структура несимметричного тензора преобразования, связывающего симметричные тензоры напряжений и деформаций. Возникает необходимость обоснования применения новой асимметричной модели двумерной деформации упругого тела при решении задач теории упругости.

Классическая и асимметричная модели двумерной теории упругости предполагают выражение компонент напряжений и вектора смещений через функции напряжений Эри $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Отметим, что поле напряжений для обеих моделей совпадает. Различия — в выражении компонент вектора смещений.

Вектор смещений неклассической двумерной модели асимметрично-упругого тела в полярных координатах (ρ, ϑ) , введенных таким образом, что $z = \rho e^{i\vartheta}$, имеет вид:

$$2|\kappa_1|^2(u_\rho + iu_\vartheta) = e^{-i\vartheta} \left\{ \left(\frac{2}{\lambda_0} |\kappa_1|^2 + \bar{\kappa}_1 \right) \varphi(z) - \kappa_1 [z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}] \right\}, \quad (1)$$

где $\kappa_1 = \mu + i\mu_0$. При $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \lambda + \mu$ из 1 получаем выражение вектора смещений классической модели. Здесь λ, μ — модули упругости Ляме ($\lambda > 0, \mu > 0$), а μ_0 может принимать любое вещественное значение.

В качестве примера плоской деформации асимметрично-упругих пластин рассмотрим одноосное растяжение пластины под углом α к оси Ox , ослабленной эллиптическим отверстием.

Отображая конформно внешность эллиптического отверстия на внешность круга единичного радиуса с помощью функции [2] $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta)$, где $R > 0, 0 \leq m \leq 1$, и, используя функции напряжений в виде [2], получаем поле напряжений для любых α и m и выражения для компонент вектора смещений. Далее, полагая $\alpha = 0$ (растяжение вдоль оси Ox) и $m = 0$ (окружность), получаем выражения для компонент вектора смещений на границе круга при $\rho = 1$ для асимметричной модели, из которых при $\mu_0 = 0$ и $\lambda_0 = \lambda + \mu$ получаем классическое решение:

$$u_p^B = \frac{pR}{4} \frac{\kappa_1^2 + \lambda_0 \mu}{\lambda_0 \kappa_1^2} (1 + 2 \cos 2\vartheta), \quad u_\theta^B = -\frac{pR}{2} \frac{\kappa_1^2 + \lambda_0 \mu}{\lambda_0 \kappa_1^2} \sin 2\vartheta.$$

Проиллюстрируем полученные решения на примере растяжения резиновой пластины ($\sigma = 0.46$, $E = 0.15 \cdot 10^7 N/m^2$) вдоль оси Ox . Растягивающее усилие $p = 0.22kN$.

На рис.1 представлен годограф вектора смещений классической модели. Видно, что при заданной нагрузке на окружности образовались "углы". Это не соответствует действительности. Кроме того, при увеличении нагрузки на окружности появляются петли, что еще более физически не реально.

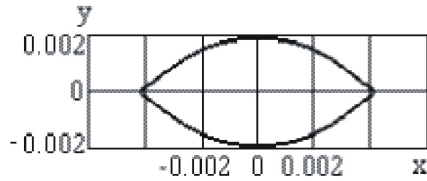


Рис. 1: Годограф вектора смещений классической модели.

Годограф вектора смещений асимметричной модели представлен на рис. 2. Годограф имеет форму эллипса, что соответствует реальности.

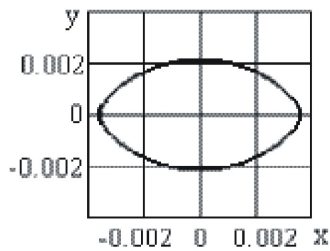


Рис. 2: Годограф вектора смещений асимметричной модели.

Итак, используя асимметричную модель мы получаем в распоряжение новый кинетический параметр, с помощью которого удастся "регуляризовать" решение. Диапазон "влияния" μ_0 зависит от начальных условий. В первую очередь, от физических характеристик материала, а также от величины приложенного усилия, от размеров отверстия и, возможно, других условий.

Список литературы

- [1] Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003. 352 с.
- [2] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Ленинград: Изд-во Академии Наук. 1933. 381 с.

Псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация и кривые задачи

В. Б. Васильев

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Россия

vbv57@inbox.ru

В теории краевых задач для псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладким краем ключевую роль играет исследование условий обратимости модельного псевдодифференциального уравнения, именно, уравнения с символом, не зависящим от пространственной переменной, в так называемой "канонической" области пространства \mathbf{R}^m , полученной локальным диффеоморфизмом окрестности точки многообразия. Автор предложил подход, основанный на специальной факторизации эллиптического символа в особой точке многообразия [1], который в ряде интересных случаев привел к корректным постановкам краевых задач в пространствах Соболева-Слободецкого и явным формулам для решений некоторых задач математической физики.

В случае $m = 2$ для модельного уравнения

$$(Au)(x) = f(x), \quad x \in K,$$

где A – псевдодифференциальный оператор с эллиптическим символом $A(\xi_1, \xi_2)$, K – квадрант, иллюстрируются основные положения авторской концепции.

Список литературы

- [1] Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: Едиториал УРСС, 2006.

Some Aspects of Entropies for Quantum Processes

N. Watanabe

Tokyo University of Science, Japan

watanabe@is.noda.tus.ac.jp

The mutual entropy (information) denotes an amount of information transmitted correctly from the input system to the output system through a channel. The (semi-classical) mutual entropies for classical input and quantum output were defined by several researchers. The fully quantum mutual entropy, which is called Ohya mutual entropy, for quantum input and output by using the relative entropy was defined by Ohya in 1983. In this paper, we compare with mutual entropy-type measures and show some results for quantum capacity.

Построение точных решений для космологических моделей

С. Ю. Вернов

НИИ Ядерной физики МГУ, Россия

svernov@theory.sinp.msu.ru

Комбинированный анализ данных, полученных при изучении сверхновых типа Ia, галактических кластеров и на эксперименте WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), убедительно показывает ускоренное расширение вселенной [1,2].

Космологическое ускорение указывает на то, что в настоящее время во вселенной доминирует равномерно распределенная медленно изменяющаяся космическая жидкость с отрицательным давлением, так называемая тёмная энергия. Для спецификации различных типов космической жидкости используется феноменологическое соотношение между давлением (лагранжевой плотностью) p и плотностью энергии ρ каждой из компонент жидкости $p = w\rho$. Функция w называется параметром состояния.

Современные эксперименты [1-3] свидетельствуют о том, что вселенная является пространственно плоской и в настоящее время параметр состояния тёмной энергии близок к -1 : $w_{DE} = -1 \pm 0.2$. При этом не установлено, зависит w_{DE} от времени или нет. Параметр состояния $w_{DE} \equiv -1$ соответствует космологической константе. Стандартным способом получения зависящего от времени параметра состояния является включение скалярных полей

в космологическую модель. Двухполевые модели с пересечением барьера космологической константы $w_{DE} = -1$ известны как квинтом (quintom) модели и включают одно фантомное скалярное поле и одно стандартное скалярное поле.

В феноменологических моделях, описывающих случай $w_{DE} < -1$, энергетические условия нарушены и есть проблемы нестабильности как на классическом, так и на квантовом уровне (см. [4] и ссылки у ней). Возможным способом избежать проблему нестабильности фантомной модели является её построение как эффективной модели, возникающей из более фундаментальной теории с нормальным знаком кинетического члена. Активно рассматривается возможность построения космологических моделей на основе полевой теории струн [5] (см. также [4,6,7] и ссылки в них). Четырёхмерная гравитационная модель с фантомным скалярным полем строится как приближение модели теории струн, что даёт надежду решить проблему нестабильности. Вселенная рассматривается как медленно распадающаяся D3-брана, динамика которой задаётся тахионом открытой струны. Для описания динамики тахиона используется метод обрезания по уровням, при этом тахион эффективно моделируется фантомным скалярным полем.

В докладе будет рассмотрена модель пространственно плоской фридмановской вселенной с фантомным и стандартным скалярными полями. Фантомное поле представляет из себя тахион открытой струны, тогда как обычное скалярное поле соответствует тахиону замкнутой струны. Форма потенциала взаимодействия этих полей предполагается заданной кубической теорией открытых струн с помощью метода обрезания по уровням. В случае плоского пространства-времени эффективная локальная теория обладает чётным потенциалом четвёртой степени и имеет решения типа кинка. В неплоском случае для сохранения аналитического вида решений нужно рассмотреть чётный потенциал шестой степени, переходящий в пределе плоского пространства-времени в потенциал типа Хиггса [6]. При этом остаётся произвол в выборе численных коэффициентов в потенциале. В докладе рассматриваются как исследованные в [8] потенциалы, так и новые.

[1] *A. Riess et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116** (1998) 1009–1038, astro-ph/9805201.

[2] *D.N. Spergel et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **148** (2003) 175–194, astro-ph/0302209; *Astrophys. J. Suppl.* **170** (2007) 263–287, astro-ph/0603449.

[3] *M. Tegmark et al.* [SDSS Collaboration], *Phys. Rev.* **D69** (2004) 103501; astro-ph/0310723.

[4] *И.Я. Арефьева, И.В. Волович*, *ТМФ* **155** (2008) 3–12, hep-th/0612098.

[5] *I. Ya. Aref'eva*, *AIP Conf. Proc.* **826** (2006) 301–311, astro-ph/0410443.

[6] *И.Я. Арефьева, С.Ю. Вернов, А.С. Кошелев*, *ТМФ* **148** (2006) 23–41; astro-ph/0412619.

[7] *I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov*, Phys. Rev. **D72** (2005) 064017, astro-ph/0507067.

[8] *С.Ю. Вернов*, ТМФ **155** (2008) 47–61, astro-ph/0612487

О спектральной теории для гиперболических уравнений

И. В. Волович

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

volovich@mi.ras.ru

В докладе рассматриваются вопросы спектральной теории для гиперболических уравнений с приложениями в математической и теоретической физике.

Рассмотрена задача на определение собственных значений и суммируемых с квадратом, как по пространственным так и по временной переменной, собственных функций для уравнения Клейна-Гордона на псевдоримановом многообразии. В отличие от классической задачи на собственные значения для уравнений эллиптического типа здесь исследуется гиперболическое уравнение. Построена бесконечная серия суммируемых с квадратом решений уравнения Клейна-Гордона на используемых в космологии многообразиях типа Фридмана, в частности на пространстве де Ситтера. Этим решениям соответствует дискретный спектр масс и конечное действие.

В простейшем случае гиперболического уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + f(t, x)u = \lambda u$$

на плоскости переменных $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, где $f(t, x)$ - заданная функция, задача ставится следующим образом. Требуется найти решение $u = u(t, x)$ и значения спектрального параметра λ , для которых

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x)^2 dt dx < \infty.$$

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Список литературы

[1] В.В. Козлов, *Суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна - Гордона на пространстве де Ситтера*, УМН. 1987. Т. 42. Вып. 4. С. 171.

- [2] И.В. Волович, В.В. Козлов, *О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна - Гордона на многообразиях*, Доклады РАН, 2006, т.408, №3, стр. 317-320.
- [3] V.V. Kozlov, I.V. Volovich, *Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.3:1349-1358,2006;
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603111>.

On Spectral Theory for Hyperbolic Equations

I. V. Volovich

Steklov Mathematical Institute, Russia

volovich@mi.ras.ru

Spectral theory for hyperbolic equations will be considered. The eigenvalue problem for the square integrable solutions is studied usually for elliptic equations. In this talk we consider such a problem for the hyperbolic Klein-Gordon equation on Lorentzian manifolds. The investigation could help to answer the question why elementary particles have a discrete mass spectrum. An infinite family of square integrable solutions for the Klein-Gordon equation on the Friedman type manifolds is constructed. These solutions have a discrete mass spectrum and a finite action. In particular the solutions on de Sitter space are investigated.

In the simplest case of a hyperbolic equation on the plane $(t, x) \in \mathbb{R}^2$

$$u_{tt} - u_{xx} + f(t, x)u = \lambda u$$

where $f(t, x)$ is a given function, the problem is formulated as follows. One has to find a solution $u = u(t, x)$ and values of the spectral parameter λ , for which

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x)^2 dt dx < \infty.$$

References

- [1] V.V.Kozlov, Uspechi Matematicheskikh Nauk, 1987. v. 42. N. 4, p. 171.
- [2] I.V.Volovich, V.V.Kozlov, Dokladi Russian Academy of Sciences, 2006, v. 408, N3, pp. 317-320.
- [3] V.V. Kozlov, I.V. Volovich, *Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.3:1349-1358,2006;
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603111>.

Кинематические параметры колебаний слоистого стержня при ударном воздействии

С. А. Воробьев

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
savor@nostra.by

Одна из основных задач динамического расчета любой конструкции – определение максимальных по модулю кинематических параметров колеблющихся элементов, знание которых позволяет в конечном итоге выполнить её прочностной расчет. Кроме обеспечения прочности часто предъявляются требования по ограничению экстремальных значений перемещений, скоростей или ускорений конструктивных элементов. Это может быть обусловлено как необходимостью выполнения определенных режимов работы машины, так и устранением вредного влияния вибраций на персонал.

Рассматривается воздействие мгновенного точечного импульса $f(\xi, \tau) = \delta(\xi - \xi_l)\delta(\tau)$ на поверхность верхнего несущего слоя трехслойного стержня при нулевых начальных условиях ($\delta(\xi)$ – дельта-функция, ξ_l – координата точки воздействия импульса, τ – время). Стержень выполнен в виде несимметричного по высоте относительно срединной плоскости жесткого несжимаемого заполнителя трехслойного пакета. Материалы слоев линейно упругие. На основании вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, используя гипотезы С. П. Тимошенко для каждого слоя и условия непрерывности перемещений на границах контакта слоев, получены уравнения движения для консервативной модели трехслойного стержня при малых деформациях. Уравнения движения – система пяти линейных дифференциальных уравнений в частных производных для искомых неизвестных функций: продольного перемещения, прогиба и полных углов поворота прямолинейных элементов в слоях стержня. Упругие несовершенства материалов слоев учитывались на основе концепции комплексного модуля упругости $E_k^* = E_k(a_k + ib_k)$, $G_k^* = G_k(a_k + ib_k)$. Здесь E_k, G_k – модули Юнга первого и второго рода соответственно k -го слоя стержня, $a_k = (4 - \gamma_k^2)/(4 + \gamma_k^2)$, $b_k = 4\gamma_k/(4 + \gamma_k^2)$, γ_k – коэффициент неупругого сопротивления материала k -го слоя, i – мнимая единица. Уравнения движения в этом случае получаются заменой в уравнениях идеально упругого стержня E_k, G_k на операторы E_k^* и G_k^* . Инерцией основания, размещенного между жесткими опорами, на которые свободно опираются торцы стержня, в уравнениях не учитывается, а его реакция предполагается пропорциональной прогибу стержня.

Аналитическое решение сформулированной начально-краевой задачи строилось с использованием комбинации метода Фурье и интегрального преобразования Лапласа по времени.

На основе аналитического решения получены численные результаты кинематических параметров колебаний стержня. В качестве материала несущих слоев принимался алюминиевый сплав, а для заполнителя – политетрафторэтилен.

Анализ численных результатов показывает, что влияние упругого основания весьма заметно сказывается на прогибах сечения (с координатой ξ_l) стержня уже по истечении короткого промежутка времени для сильно различающихся между собой коэффициентов жесткости основания. Скорость оказывается менее чувствительной к наличию основания и его жесткости, чем прогибы. Практически незаметно влияние основания даже большой жесткости на значения ускорений. Внутреннее трение, несмотря на свою малую величину, оказывает значительно большее влияние на ускорение, чем упругое основание.

Как найти оптимальную область для спектрального функционала

Y. S. Gasimov

Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Azerbaijan

yusifcan@rambler.ru

В работе мы рассматриваем минимизацию по области функционалов, включающих собственные значения эллиптического оператора. Используя введенную ранее технику, вычисляется первая вариация этих функционалов относительно области. На основе полученных формул предлагается алгоритм для численного решения задачи.

О фрактальной структуре инвариантных множеств ренормгруппы на иерархической решетке

А. Р. Гатауллин, М. Д. Миссаров

Казанский государственный университет, Россия

Moukadas.Missarov@ksu.ru

Фермионная модель на иерархической решетке задается гамильтонианом

$$H(\psi^*; \alpha) = \sum_{i,j \in \Lambda} d^{-\alpha}(i,j) [\bar{\psi}_1(i)\psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(j)] + \sum_{i \in \Lambda} [r(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + g\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)],$$

где $d(i, j)$ обозначает иерархическое расстояние на иерархической решетке Λ с размером элементарной ячейки n , α – параметр модели, r и g – константы связи (вещественные числа), все компоненты фермионного поля $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, $i \in \Lambda$ являются образующими алгебры Грассмана. Преобразование ренормгруппы (РГ) Вильсона с параметром α сводится к преобразованию $R(\alpha)(r, g) = (r', g')$ в пространстве констант связи:

$$r' = \lambda \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} (r+1) - 1 \right), \quad g' = \frac{\lambda^2}{n} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g,$$

где $\lambda = n^{\alpha-1}$. При $\alpha > 3/2$ существуют две нетривиальные неподвижные точки отображения $R(\alpha)$, которые обозначаются как “+”-ая НТ и “-”-ая НТ. Первая из них лежит в квадранте $(r > 0, g > 0)$, вторая - в квадранте $(r < 0, g > 0)$. В работах [1],[2] было показано, что существует гладкая возрастающая функция $g = h_+(r; \alpha)$, $0 \leq r < \infty$, график которой является частью устойчивой РГ-инвариантной кривой для “+”-ой НТ и существует гладкая убывающая функция $g = h_-(r; \alpha)$, $-\infty < r < -1$, график которой является частью устойчивой РГ-инвариантной кривой для “-”-ой НТ. Было также показано, что область $\Omega_+ = \{(r, g) : r > 0, 0 < g < h_+(r; \alpha)\}$, лежащая справа от кривой $g = h_+(r; \alpha)$ и область $\Omega_- = \{(r, g) : r < -1, 0 < g < h_-(r; \alpha)\}$, лежащая слева от кривой $g = h_-(r; \alpha)$ являются РГ-инвариантными. Точки из этих областей при итерациях РГ-отображения стремятся к бесконечно-удаленной НТ справа и слева соответственно. Разработанный нами комплекс программ позволил получить описание динамики РГ в центральной области Ω , лежащей между кривыми $g = h_+(r; \alpha)$ и $g = h_-(r; \alpha)$. В частности, множество точек, попадающих за конечное число итераций РГ в

область Ω_+ , может быть описано следующим образом. Существует счетная серия непересекающихся подмножеств $C, A(1), A(2), A(3), \dots$ области Ω . Обозначим через $A(0)$ объединение множеств C и Ω_+ . В свою очередь, каждая из зон $A(i), i = 1, 2, \dots$ имеет свою (сателлитную) счетную серию непересекающихся подмножеств $A(i, j), j = 1, 2, \dots$ и так далее. Если точка принадлежит зоне $A(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $i_1 > 1$, то за одну итерацию РГ она перейдет в зону $A(i_1 - 1, i_2, \dots, i_k)$, а если $i_1 = 1$, то она перейдет в зону $A(i_2, i_3, \dots, i_k)$. Точка из зоны $A(i), i = 1, 2, \dots$ за одну итерацию переходит в зону $A(i - 1)$. Аналогично устроены подмножества $B(i_1, i_2, \dots, i_k)$ точек, переходящих за конечное число итераций в область Ω_- . Все остальные точки области Ω лежат на границах зон $A(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $B(i_1, i_2, \dots, i_k)$. Эти границы являются инвариантными кривыми для отображения $R(\alpha)$ или его степеней. В частности, численными методами обнаружено, что существуют циклы ренормгруппы k -ого порядка при $k < 10$ и они лежат на границе множеств $A(k, k, k, \dots)$ и $B(k, k, k, \dots)$.

Список литературы

- [1] Лернер Э.Ю., Миссаров М.Д. ТМФ. 1996. Т.107. N2. С.201–212.
 [2] Миссаров М.Д. ТМФ. 1998. Т.114. N3. С.323–336.

О теплопроводности в пространстве фрактальной размерности

С. О. Гладков,

Московский Государственный областной университет, Россия

Sglad@newmail.ru

С. Б. Богданова,

Московский Государственный областной университет, Россия

Sonjaf@list.ru

Настоящая работа содержит результаты исследования процесса теплопроводности в пространствах не целой размерности, которых в природе насчитывается огромное количество. Одними из первых работ, где исследовались физические свойства фракталов, по-видимому, являются работы [1,2] (см. также [3]). Многочисленные объекты, дающие примеры пространств

нецелой (фрактальной) размерности, подробно описаны в монографиях [4], [5]. В статье [1] был проанализирован процесс теплопереноса для квазиодномерного случая, т.е. для пространства размерности $d_F = 1 + \varepsilon$, где ε - некоторое малое положительное число. Получить функцию распределения температуры в квазиодномерном случае удалось благодаря введению оператора дробного дифференцирования с помощью преобразования Фурье. Развитие идей, предложенных в работе [1], привело к успешному описанию процесса теплопроводности в квази- n -мерном многообразии.

В пространстве произвольной размерности $d_F = d - \varepsilon$, где $d = 1, 2, 3, \dots, n$, удобно ввести обобщенное преобразование Фурье, которое мы представим следующим образом:

$$T_x = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} T_k e^{i \sum_{j=1}^n k_{x_j}^{1-\varepsilon} x_j^{1-\varepsilon}} \prod_{j=1}^n k_{x_j}^{-\varepsilon} d^n k \quad (1)$$

обратным для которого служит

$$T_k = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} T_{x'} e^{-i \sum_{j=1}^n k_{x_j}^{1-\varepsilon} x_j'^{1-\varepsilon}} \prod_{j=1}^n x_j'^{-\varepsilon} d^n x' \quad (1')$$

Оператор дифференцирования в пространстве d_F определим так, чтобы при $\varepsilon = 0$ он совпадал с обычным дифференцированием по координате x :

$$A_{x_j} T_x = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} i T_k k_{x_j}^{1-\varepsilon} x_j^{-\varepsilon} e^{i \sum_{j=1}^n k_{x_j}^{1-\varepsilon} x_j^{1-\varepsilon}} \prod_{j=1}^n k_{x_j}^{-\varepsilon} d^n k \quad (2)$$

Тогда квадрат этого оператора должен быть определен так:

$$A_{x_j}^2 T_x = - \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} T_k k_{x_j}^{2(1-\varepsilon)} x_j^{-2\varepsilon} e^{i \sum_{j=1}^n k_{x_j}^{1-\varepsilon} x_j^{1-\varepsilon}} \prod_{j=1}^n k_{x_j}^{-\varepsilon} d^n k \quad (3)$$

С учетом формул (1), (3) и (4), из обобщенного на случай квази- n -мерного пространства уравнения Фурье $\frac{\partial T}{\partial t} = \chi A^2 T$, где χ - коэффициент теплопроводности в пространстве размерности $d_F = d - \varepsilon$, получаем:

$$T_k = -\chi T_k \sum_{j=1}^n k_{x_j}^{2(1-\varepsilon)} x_j^{-2\varepsilon} \quad (4)$$

Решая уравнение (4) и, совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$T_x = \left(\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} T_a x' \prod_{j=1}^n x_j'^{-\varepsilon} d^n x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sum_{j=1}^n f(k_{x_j})} \prod_{j=1}^n k_{x_j}^{-\varepsilon} d^n k \quad (5)$$

где $f(k_{x_j}) = -\chi k_{x_j}^{2(1-\varepsilon)} x_j^{-2\varepsilon} t + i k_{x_j}^{1-\varepsilon} (x_j^{1-\varepsilon} - x_j'^{1-\varepsilon})$.

Каждый из внутренних интегралов по k с помощью замены $k_j^{1-\varepsilon} = u_j$ приводится к интегралу Лапласа $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$

и таким образом функция температуры имеет вид:

$$T_x = \left(\frac{1-\varepsilon}{2\pi}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{\chi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{x'} \prod_{j=1}^n \left(\frac{x_j}{x_j'}\right)^\varepsilon \exp \sum_{j=1}^n -\frac{x_j^{2\varepsilon} (x_j'^{1-\varepsilon} - x_j^{1-\varepsilon})^2}{4\chi t} dx' \quad (6)$$

Список литературы

- [1] Гладков С.О. К теории одномерной и квази - одномерной теплопроводности. ЖТФ 1997, т.67, вып.7, с.8-12.
- [2] Гладков С.О. К теории гидродинамических явлений в квази - одномерных системах. ЖТФ 2001, т.71, в.11, с.130-132.
- [3] Гладков С.О. Сборник задач по теоретической и математической физике. М.:Физматлит, 2006. 456с.
- [4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 1962. 807 с.
- [5] М.Шредер. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск., 2001. 528 с.
- [6] Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991.

Интегралы по траекториям в квантовой оптике

А. В. Горохов

Самарский государственный университет, Россия

gorokhov@ssu.samara.ru

В докладе дан обзор применений теоретико-групповых методов и техники когерентных состояний на группах Ли для построения и расчета интегралов по траекториям для тех квантовых систем, которые не имеют традиционных классических аналогов.

Пусть для некоторой квантовой задачи найдена динамическая группа гамильтониана \hat{H} . Будем понимать под этим утверждением, что в пространстве всех состояний системы действует некоторое унитарное неприводимое представление группы G , а гамильтониан системы \hat{H} удалось выразить в виде полиномиальной операторнозначной функции самосопряженных генераторов представления $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_r$:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{s_1, \dots, s_r} \omega_{s_1 \dots s_r} \hat{A}_1^{s_1} \dots \hat{A}_r^{s_r}.$$

Здесь r — число параметров в группе G , а коэффициенты $\omega_{s_1 \dots s_r}$ могут зависеть от времени (при учете воздействия на квантовую систему внешних классических полей).

Информация о динамике системы заключена в матричных элементах оператора эволюции:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T}_D \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right].$$

При вычислении матричных элементов оператора эволюции использован базис когерентных состояний на группе G , задаваемый орбитой представления группы G на фиксированном векторе $|0\rangle$ со стационарной подгруппой G_0 , а именно:

$$\forall g_\xi \in \mathcal{X} = G/G_0 \longmapsto |\xi\rangle = \hat{T}(g_\xi)|0\rangle.$$

Показано, что матричный элемент $\langle \xi | \hat{U}(t, t_0) | \xi_0 \rangle$ приводится к виду интеграла по траекториям на однородном пространстве \mathcal{X} (многообразии Кэлера), дан рецепт его расчета, основанный на использовании формулы Троттера и фейнмановской техники распутывания операторных экспонент, и исследованы квазиклассические асимптотики.

Метод обобщен на случай открытых квантовых систем, для отыскания пропагатора уравнения Фоккера-Планка для P - символа матрицы плотности, удовлетворяющей квантовому кинетическому (управляющему) уравнению.

Исследованы применения развитого подхода к некоторым задачам квантовой оптики (N - уровневый атом во внешних классических полях, релаксация фотонной моды в неидеальном резонаторе, динамика одноатомного лазера с учетом потерь в фотонной моде).

О решениях уравнений типа Обербека–Буссинеска для слабо сжимаемых сред

Н. А. Гусев

Московский физико-технический институт, Россия

nick.goussev@gmail.com

В ряде недавно опубликованных работ (см. [1] и цитированные там работы, а также [2]) обсуждались математические вопросы механики *слабо сжимаемых* сплошных сред. Один из таких вопросов можно сформулировать следующим образом: являются ли решения уравнений несжимаемой жидкости пределом решений общих уравнений сжимаемой сплошной среды?

В данной работе в качестве системы уравнений сжимаемой сплошной среды рассматривается упрощённая система уравнений типа Обербека–Буссинеска:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \rho \partial_t \vec{v} + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}, \quad \rho c_V \partial_t T = \varkappa \Delta T, \quad (1)$$

где $\rho = \rho_0 + \varepsilon R(p, T)$; $R(p, T)$ — достаточно гладкая функция; $\rho_0, c_V, \mu, \varkappa = \text{const} > 0$; $\varepsilon \geq 0$ — *фактор сжимаемости*. При $\varepsilon = 0$ эта система переходит в нестационарные уравнения Стокса для несжимаемой жидкости и уравнение теплопроводности:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \rho_0 \partial_t \vec{v} + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho_0 \vec{f}, \quad \rho_0 c_V \partial_t T = \varkappa \Delta T, \quad (2)$$

Системы (1) и (2) рассматриваются в виде $\Pi(\varepsilon, y) = 0$, где Π — некоторый оператор, $y = (\vec{v}, p, T)$. Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ существует $y_0 = (\vec{v}_0, p_0, T_0)$ — решение системы (2). Исследуются условия, при которых существует решение уравнения $\Pi(\varepsilon, y) = 0$, непрерывно зависящее от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказывается модификация теоремы о неявном операторе, в которой

для существования таких решений вместо непрерывной обратимости производной Гато $\Pi'_y(0, y_0)$ требуется существование линейного непрерывного правого обратного оператора для $\Pi'_y(0, y_0)$.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^{2+2\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$; $\mathcal{T} > 0$. Обозначим $Q = \Omega \times (0, \mathcal{T})$ и

$$\mathbf{S} = \{(\vec{v}, p, T) : (\vec{v}, \nabla p, T) \in \\ \in C^{2+2\alpha, 1+\alpha}(\overline{Q}) \times C^{2\alpha, \alpha}(\overline{Q}) \times C^{2+2\alpha, 1+\alpha}(\overline{Q})\}$$

С помощью модификации теоремы о неявном операторе, теоремы Солоникова [3] для нестационарной системы Стокса и доказанных в ней априорных оценок, а также с помощью соответствующих теорем для уравнения теплопроводности [4] в данной работе получен следующий результат:

Теорема. Пусть существует достаточно гладкое (принадлежащее \mathbf{S}) решение (\vec{v}_0, p_0, T_0) уравнений (2) в \overline{Q} . Тогда существует такое $\varepsilon_* > 0$, что для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ существуют решения $(\vec{v}_\varepsilon, p_\varepsilon, T_\varepsilon)$ уравнений (1), принадлежащие \mathbf{S} , причём при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место сходимость

$$(\vec{v}_\varepsilon, p_\varepsilon, T_\varepsilon) \rightarrow (\vec{v}_0, p_0, T_0) \quad \text{по норме } \mathbf{S}.$$

Список литературы

- [1] Файрайзл Э. Асимптотический анализ полной системы Навье–Стокса–Фурье: от течений сжимаемой к течениям несжимаемой жидкости // УМН т. 62, вып. 3 (375), май–июнь 2007 г.
- [2] Шифрин Э.Г. Условие непрерывной зависимости от сжимаемости нестационарных течений вязких мало сжимаемых жидкостей // ДАН, Механика, 1999, том 365, № 2, с. 197-200.
- [3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
- [4] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

Язык некоммутативных структур и деформационное квантование

Ф. Е. Гусев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия
gusevfe@gmail.com

Д. Д. Онищенко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия
onish_dd@mail.ru

И. Ю. Полехин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия
polekhin@yandex.ru

Новым перспективным подходом к решению проблем, связанных с деформационным квантованием механических систем, представляется использование некоторого альтернативного языка, предложенного и развиваемого Д.В. Трещёвым [1],[2] и его учениками. Ключевым элементом этого языка является понятие некоммутативной структуры. Паре (классическая система - квантовая система) сопоставляется пара ассоциативных алгебр наблюдаемых - коммутативная и некоммутативная соответственно. Последняя, не являющаяся свободной с учетом наличия коммутационных соотношений в квантовой системе, носит название некоммутативной структуры. Указанные алгебры снабжаются структурами алгебр Ли. Классические объекты (в т.ч. скобка Пуассона) получаются из квантовых (некоммутативных) с помощью канонических проекций - гомоморфизмов ассоциативных алгебр.

Выясняется, что при некоторых естественных дополнительных условиях задание некоммутативной структуры на пуассоновом многообразии эквивалентно заданию *-произведения на нем; более точно, некоммутативная структура и формальная деформация алгебры классических наблюдаемых вдоль соответствующей скобки Пуассона изоморфны как ассоциативные алгебры. Но язык некоммутативных структур по сравнению с традиционным лучше приспособлен для перевода на язык функционального анализа и более эстетичен с алгебраической точки зрения. С целью проиллюстрировать это на примере обсуждается случай, когда фазовое пространство системы трехмерно, а скобка Ли образующих некоммутативной алгебры имеет вид полинома второй степени. Производится классификация квадратичных скобок Ли и соответствующих скобок Пуассона классической системы. Для каждого класса скобок предьявляются функции Казимира в коммутативном и некоммутативном случаях, и на возникающих инвариантных поверхностях в фазовом пространстве строятся *-произведения.

Список литературы

- [1] Трещёв Д. *Квантовые наблюдаемые: алгебраический аспект*. Труды института им. В.А. Стеклова. Т. 250, 2005, стр. 211-244.
- [2] Трещёв Д. *Некоммутативные структуры*. Труды института им. В.А. Стеклова. Т. 259, 2007, стр. 203-242.

Внутренние оценки обобщённых решений эллиптического уравнения второго порядка.

А. К. Гуцин

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия

akg@mi.ras.ru

Ограниченное классическое решение линейного эллиптического уравнения второго порядка с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами и правой частью удовлетворяет внутренним оценкам Шаудера, описывающим возможный рост при приближении к границе тех характеристик гладкости, которыми обладает решение: производных решения и их разностных отношений, входящих в соответствующую гёльдерову норму, см., например, [1]. Настоящая работа посвящена получению такого типа утверждений для обобщённого решения, обладающего другими характеристиками гладкости.

Известная теорема Де Джорджи и Нэша, [2], [3], утверждает, что обобщённые решения равномерно эллиптического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in Q, \quad (1)$$

с измеримыми и ограниченными коэффициентами $a_{i,j}$, принадлежащее (по определению) пространству Соболева $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$, непрерывны по Гёльдеру внутри рассматриваемой области $Q \subset \mathbf{R}_n$ с показателем $\alpha > 0$, зависящим лишь от n и постоянной эллиптичности. В работах автора [4] и [5] установлены свойства решений уравнения (1), занимающие "промежуточное" положение между "интегральным" свойством принадлежности пространству $W_{2,\text{loc}}^1(Q)$ и "точечным" свойством внутренней непрерывности по Гёльдеру. Показано, что среди этих промежуточных "свойств" существуют и такие, которые не вытекают из "крайних". Целью настоящего сообщения является получение аналогичных глобальных свойств решений, имеющих конечный интеграл $\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx$, $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q .

Будем предполагать, что нормаль к границе непрерывна по Дини, а коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию Дини на границе (подробнее см. [6]). Описание обсуждаемых свойств решения u даётся в терминах ограниченности семейства интегралов от $|u(y) - u(x)|^2$ по специальным образом нормированным мерам Бореля ϕ (неотрицательным, принимающим и бесконечные значения) на множестве $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}_{2n} : |y - x| \neq 0\}$,

носители которых лежат в $D \cap (\bar{Q} \times \bar{Q})$. Мера ϕ , не ограничивая общность, можно считать симметричной относительно "диагонали" $\{x = y\}$. Основным является выбор класса мер: чем он шире, чем больший рост допускается при приближении к "диагонали" $\{x = y\}$, тем сильнее получаемые свойства гладкости.

Обозначим через ϕ_1 сужение меры ϕ на множество $\{(x, y) \in D \cap (Q \times Q) : |y - x| \leq \frac{1}{5}r(x, y)\}$, $r(x, y) = \min\{r(x), r(y)\}$; ϕ_2 – сужение ϕ на дополнение этого множества. Борелевскую меру Φ на множестве $D \times \mathbf{R}_1$ будем называть разложением меры ϕ_1 , если $\Phi(G \times \mathbf{R}_1) = \phi_1(G)$ для всех (борелевских) множеств $G \subset D$ и носитель Φ лежит в $\{(x, y, t) : |y - x| \leq t \leq \frac{1}{5}r(x, y)\}$. Мера ϕ допустима, если существует такая постоянная $C > 0$, что меры ϕ_1 и ϕ_2 удовлетворяют условиям:

1) найдётся такое разложение Φ меры ϕ_1 , что для всех $z \in \mathbf{R}_n$

$$\int \int \int_{\{|x-z| \leq 2t\}} \left(\frac{|y-x|}{t} \right)^{2\alpha} \frac{d\Phi}{t^{n-2}} \leq Cr(z);$$

2) для любых $z \in \partial Q$ и $\rho > 0$

$$\phi_2(\{(x, y) : |x - z| \leq \rho\}) \leq C\rho^{n-1}.$$

Точную нижнюю грань множества таких постоянных C будем обозначать через $\|\phi\|$.

Теорема. Для любой допустимой меры ϕ справедлива оценка

$$\int \int_D |u(y) - u(x)|^2 d\phi \leq C\|\phi\| \int_Q r(x)|\nabla u(x)|^2 dx \quad (2)$$

с постоянной C , зависящей от n , постоянной эллиптичности уравнения, области Q и модуля непрерывности коэффициентов на границе.

Если в установленной оценке ограничиться мерами, сосредоточенными в точке (каждая в своей) области $Q \times Q$, то получим свойство внутренней непрерывности по Гёльдеру и точную по порядку роста при приближении к границе оценку соответствующего разностного отношения. Выбирая различные семейства допустимых мер, можно получать и другие свойства решения, в том числе его $(n-1)$ -мерную непрерывность, см. [7], и свойства, не являющиеся следствиями отмеченных выше. Основные результаты работы анонсированы в заметке [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00144) и гранта президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ - 3224 - 2008.1).

Список литературы

- [1] Гилбарг Д. Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука. 1989.
- [2] De Giorgi E. // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1957. V. 3. P. 25 – 43.
- [3] Nash J. // Amer. J. Math. 1958. V.80. P. 931–954.
- [4] Гуцин А.К. // Сибирский математический журнал. 2005. т. 46. N 5. Стр. 1036 – 1052.
- [5] Гуцин А.К. // ДАН. 2005. т. 404. N 1. Стр. 14 – 17.
- [6] Гуцин А.К. // ДАН. 2007. т. 415. N 1. Стр. 1 – 4.
- [7] Гуцин А.К. // Матем. сб. 1988. Т. 137. N 1. С. 19-64.

Динамика свойств материала МР в технологическом пространстве

М. В. Дегтярев

*Самарская государственная аэрокосмическая академия
им. С.П. Королева, Россия*

ldpr63@mail.ru

Согласно первому началу термодинамики при адиабатическом прессовании таблеток из материала МР выполняется соотношение

$$dU = p \cdot dV. \quad (1)$$

Объем V в формуле (1) складывается из объема металла и объема пор. Поэтому изменение объема с высокой степенью точности равно:

$$dV = d(V_M + V_{II}) = dV_{II} = Nd\bar{V}_p = N\frac{\pi}{2}\bar{x}^2d\bar{x}. \quad (2)$$

В приближении

$$\left| \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \right)_{\sigma_d} \Delta \bar{x} \right| \gg \left| \left(\frac{\partial U}{\partial \sigma_d} \right)_{\bar{x}} \Delta \sigma_d \right| \quad (3)$$

изменение внутренней энергии образца МР выражается через изменение среднего диаметра пор:

$$dU = \frac{\pi N}{2} [\kappa \bar{x} - u_0 (\bar{x}^2 + \sigma_d^2)] d\bar{x}. \quad (4)$$

Поэтому в настоящей работе всюду используется приближение $\sigma_d = \text{const}$. С учетом сделанных замечаний зависимость $\bar{x} = \bar{x}(p)$ определяется уравнением

$$\kappa \bar{x} - u_0 (\bar{x}^2 + \sigma_d^2) = p \bar{x}^2, \quad (5)$$

физически допустимое решение которого имеет вид

$$\bar{x} = \frac{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 4u_0\sigma_d^2(p + u_0)}}{2(p + u_0)}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что средний размер поры, как функция давления прессования, подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\bar{x}}{dp} = -\frac{\bar{x}^3}{\kappa \bar{x} - 2u_0\sigma_d^2}. \quad (7)$$

При выводе уравнения (7) предполагалось, что все величины в термодинамической теории МР являются вещественными и удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \bar{x} > 0, \\ \frac{d\bar{x}}{dp} < 0, \\ \langle u(x) \rangle \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

которые, накладывают ограничения на соотношения между параметрами:

$$\begin{cases} \kappa \geq 2\sigma_d \sqrt{u_0(p + u_0)} \\ \frac{2u_0\sigma_d^2}{\bar{x}} < \kappa < 2(p + u_0)\bar{x} \\ \kappa > \frac{u_0}{6} \frac{\bar{x}^3 + 3\bar{x}\sigma_d^2}{\bar{x}^2 + \sigma_d^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение (7) имеет прозрачный физический смысл. В нем действие соседних пор на данную пору заменено эквивалентным действием упругих стенок. Чем больше давление прессования, тем медленнее идет деформация поры по всем направлениям из-за нарастающей жесткости боковых стенок. При этом скорость изменения размера пор зависит от величины давления прессования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изжеуров Е.А., Вахитов А.З., Некоторые аспекты изготовления изделий газового тракта энергетических установок из упругого пористого материала МР с заданными параметрами структуры, Энергетические системы. Организация. Управление. Автоматизация. Научно-технический сборник. Часть II, с. 7-14, ИПО СГАУ, Самара, 1996.

Об одном подходе к проблеме регуляризации краевой задачи для гиперболического уравнения

Д. Х. Джураев

*Таджикский государственный национальный университет,
Таджикистан
hayrullo_58@mail.ru*

Предложен метод построения алгоритма приближенных решений краевых задач для гиперболического уравнения, обладающий свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных.

Решение видоизмененной задачи Коши для одного уравнения гиперболического типа третьего порядка в специальном классе W_p

В. М. Долгополов

*Самарский государственный университет, Россия
mvdolg@ssu.samara.ru*

И. Н. Родионова

*Самарский государственный университет, Россия
mvdolg@ssu.samara.ru*

Уравнение вида

$$U_{xyz} - \frac{p}{x-y-z}U_{xz} + \frac{p}{x-y-z}U_{yz} - \lambda U_z = 0 \quad (\lambda - const, 0 < p < \frac{1}{2}) \quad (1)$$

рассмотрим в области $\mathcal{H} = \{x, y, z/0 < z < x - y, 0 < y < x < +\infty\}$ трехмерного евклидова пространства. Методом Римана для уравнения (1) в области \mathcal{H} решена видоизмененная задача Коши (задача C) с данными на плоскости сингулярности коэффициентов уравнения:

$$U(x, y, x - y) = \tau(x, y), \quad 0 \leq y < x < +\infty; \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu(x, y), \quad 0 < y < x < +\infty; \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} (x - y - z)^{2p} (U_{xz} - U_{yz}) = \mu(x, y), \quad 0 < y < x < +\infty; \quad (4)$$

$$\tau_{xy} \in C(\overline{D}), \quad \nu(x, y) \in C^{(2)}(\overline{D}), \quad \mu(x, y) \in C^{(2)}(\overline{D}),$$

где $D = \{(x, y)/0 < y < x < +\infty\}$. Это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = & \tau(x, y) - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1-2p)}{\Gamma^2(1-p)} \int_z^{x-y} ds \int_{y+s}^x \mu(t, t-s)(x-t)^{-p} \times \\ & \times (t-y-s)^{-p} {}_0F_1(1-p; -\lambda(x-t)(t-y-s)) dt - \\ & - \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p)} \int_z^{x-y} ds \int_{y+s}^x \nu(t, t-s)(x-t)^{p-1} \times \\ & \times (t-y-s)^{p-1} {}_0F_1(p; -\lambda(x-t)(t-y-s)) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем специальный класс решений W_p задачи C подобно тому, как это было сделано И.Л. Каролем [1] для уравнения Эйлера–Дарбу на плоскости. Цель такого введения:

- а) упростить вид решения задачи C , сделав его более удобным для решения новых задач;
- б) распространить решение задачи C на случай отрицательного параметра уравнения (1), при котором формула (5) теряет смысл.

Для этого потребуем от заданной функции $\nu(x, y)$ интегрального преобразования

$$\nu(t, t-s) = \int_0^{t-s} T(s, \xi)(t-\xi-s)^{-2p} {}_0F_1(1-p, -\lambda(t-s-\xi)^2) d\xi \quad (6)$$

$$T(x, y) \in C^{(2)}(\overline{D})$$

Подставив функцию (6) в формулу (5), получаем вид решения задачи C в специальном классе W_p

$$\begin{aligned}
U(x, y, z) = & \tau(x, y) - \int_z^{x-y} ds \int_0^y T(s, \xi)(y - \xi)^{-p}(x - \xi - s)^{-p} \times \\
& \times {}_0F_1(1 - p; \lambda(y - \xi)(x - \xi - s))d\xi - \int_z^{x-y} ds \int_y^{x-s} N(s, \xi)(x - \xi - s)^{-p} \times \\
& \times (\xi - y)^{-p} {}_0F_1(1 - p; \lambda(y - \xi)(x - \xi - s))d\xi, \tag{7}
\end{aligned}$$

где

$$N(s, \xi) = \frac{T(s, \xi)}{2 \cos \pi p} + \frac{\Gamma(1 - 2p)}{2\Gamma^2(1 - p)} \mu(\xi + s, s). \tag{8}$$

Формула (7) имеет смысл и при $p = -q$, $0 < q < \frac{1}{2}$. Полагая в уравнении (1), условия (4), формулах (6)-(8) $p = -q$, получаем решение задачи C в классе W_q для уравнения (1) в случае отрицательного параметра. Это доказано непосредственной проверкой.

В качестве примера рассмотрим решение одной смешанной задачи ($C - \mathcal{H}$) для уравнения (1) в классе W_p с данными (2), (3) и

$$U(x, 0, z) = \varphi(x, z), \quad 0 \leq z \leq x < +\infty. \tag{9}$$

Для решения поставленной задачи положим в функции (7) $y = 0$ и, подчиняя ее условию (9), приходим к интегральному уравнению относительно неизвестной функции N

$$\int_z^x ds \int_0^{x-s} N(s, \xi) \xi^{-p}(x - \xi - s)^{-p} {}_0F_1(1 - p; -\lambda\xi(x - \xi - s))d\xi = -\varphi(x, z),$$

единственное решение которого при выполнении условий $\varphi(x, x) = \varphi'_x(x, x) = 0$, $\varphi''_{xz} \in C(\overline{D})$ определяется формулой

$$\begin{aligned}
N(s, \xi) = & \frac{s^p}{\Gamma(p)\Gamma(1 - p)} \int_s^{\xi+s} \varphi''_{st}(t, s)(\xi + s - t)^{p-1} {}_0F_1(p, \lambda\xi(\xi + s - t))dt - \\
& - \frac{\lambda}{p} \int_s^{\xi+s} \varphi'_s(t, s)(\xi + s - t)^p {}_0F_1(1 + p; \lambda\xi(\xi + s - t))dt.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Кароль И.Л. «Об одной краевой задаче для уравнения специального эллипτικο-гиперболического типа» - ДАН СССР т. 88, 2. 1953

Температурный потенциал МССМ вблизи фазового перехода первого рода

М. В. Долгополов

Самарский государственный университет, Россия

mikhaildolgopolov@rambler.ru

Большинство сценариев для генерации барионной асимметрии требуют наличия сильного фазового перехода I рода, иначе барионная асимметрия, генерируемая в процессе электрослабого фазового перехода, впоследствии исчезает [1]. Формально фазовый переход описывается высокотемпературным потенциалом Хиггса, в котором присутствует кубическое по полям слагаемое [2-7]. Чем больше величина отрицательного коэффициента при этом слагаемом, тем сильнее в теории выражен фазовый переход I рода, который мог бы сосуществовать с ограничением снизу коллайдера LEP2 на массу легкого нейтрального бозона Хиггса $m_H > 115$ ГэВ. Увеличение кубического слагаемого достигается посредством учета однопетлевых поправок в рамках ряда сценариев, характеризующихся различными значениями независимых параметров, прежде всего масс частиц. Проверка влияния кубического слагаемого оказывается возможной на основе планируемых экспериментов на LHC по определению трилинейной константы связи λ_{hhh} [8]. Одним из наиболее перспективных является сценарий с малым массовым параметром правого \tilde{t} -кварка в МССМ [7]. Для описания эволюции формы конечно-температурного потенциала и конкретизации типа фазового перехода необходимо вычислить вклады сектора "скалярные кварки-бозоны Хиггса" в параметры λ_i эффективного потенциала, используя метод его разложения по обратным степеням M_{SUSY} [2, 2] или высокотемпературный предел декаплинга [8, 2], а также диаграммным способом [6].

В работе рассматриваются температурные потенциалы Хиггса SM и МССМ, полученные в подходе эффективного потенциала и с использованием диаграммного метода. В рамках минимальной суперсимметричной модели МССМ с явным нарушением CP -инвариантности вычислен однопетлевой эффективный двухдублетный потенциал при конечной температуре вблизи точки фазового перехода I рода.

Список литературы

- [1] Рубаков В. А., Шапошников М. Е., УФН, 166 493 (1996)
- [2] Dolan L., Jackiw R., *Phys. Rev. D*, 9 3320 (1974)
- [3] Weinberg S., *Phys. Rev. D*, 9 3357 (1974)
- [4] M. Dine, R. Leigh, P. Huet, A. Linde, D. Linde, *Phys. Lett. B* 283, 319 (1992); *Phys. Rev. D* 46, 550 (1992). A. Megevand, A.D. Sanchez *Phys. Rev. D*, 77 063519 (2008)
- [5] A. Brignole, J.R. Espinosa, M. Quiros, F. Zwirner, *Phys. Lett. B* 324 94, 181-191 (1994).
- [6] P. Arnold, O. Espinosa, *Phys. Rev. D* 47, 3546 (1993), Err. 50, 6662 (1994).
- [7] M. Carena, M. Quiros, C.E.M. Wagner // *Phys. Lett. B*. 380, 81 (1996)
- [8] Y. Okada et al. (Shinya Kanemura, Yasuhiro Okada and Eibun Senaha) In: Proc. of CERN Workshop on CP studies and nonstandard Higgs physics, ed. by S.Kraml, G.Azuelos, D.Dominici, J.Ellis, G.Grenier, H.Haber, J.S.Lee, D.Miller, A.Pilaftsis, W.Porod, CERN Yellow Report 2006-009, 2006. hep-ph/0608079. (<http://kraml.home.cern.ch/kraml/cpnsh/>). Andrew Noble and Maxim Perelstein hep-ph 0711.3018
- [9] Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов, М.Н. Дубинин // ЭЧАЯ. Том 37. Вып.5, 1285 (2006); E.N. Akhmetzyanova, M.V. Dolgoplov, M.N. Dubinin // *Phys. Rev. D* 71, 075008 (2005). Э. Н. Ахметзянова, М. В. Долгополов, М. Н. Дубинин, И. А. Смирнов, ЯФ **68**, 569 (2005).

Некоторые применения тауберовых теорем в комплексном анализе

Ю. Н. Дрожжинов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

`Drozzin@mi.ras.ru`

В докладе рассматриваются следующие две задачи. Задача о "некомпенсации" особенностей функций, голоморфных в трубчатых областях над конусами и задача об асимптотическом поведении голоморфных функций в граничной точке, если известно асимптотическое поведение обобщенной

функции (в этой точке), которая является разностью граничных значений этих голоморфных функций. Будут изложены соответствующие тауберовы теоремы, опираясь на которые доказываются некоторые результаты по этим двум задачам.

Работа выполнялась при частичной поддержке гранта РФФИ 07-01-00144 и гранта президента РФ НШ-3224.2008.1.

Литература: Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М. Наука, 1986.

Задача восстановления памяти в уравнении колебания струны

Д. К. Дурдиев

Бухарский государственный университет, Узбекистан

durdiev65@mail.ru

Рассматривается начально-краевая задача

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau)u(x, y, t - \tau)d\tau = 0, (x, t) \in R_+^2, \quad (1)$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, u_x|_{x=0} = \delta'(t) + f(t)\theta(t), \quad (2)$$

где

$$R_+^2 = \{(x, t) \in R^2 | x > 0\},$$

$\theta(t) = 1, t \geq 0; \theta(t) = 0, t < 0$, $\delta'(t)$ - вторая обобщенная производная функции $\theta(t)$.

На границе области R_+^2 задается дополнительное условие

$$u|_{x=0} = F(t), t > 0. \quad (3)$$

Задача (1)-(3) называется *обратной задачей*. Под ее *решением* понимается такая функция $k(t) \in [0, \infty]$, что соответствующее ей решение задачи (1), (2) удовлетворяет равенству (3).

Показано, что для разрешимости обратной задачи необходимо, чтобы функция $F(t)$ имела вид

$$F(t) = -\delta(t) + F_0(t)\theta(t), t > 0,$$

причем функция $F_0(t)$ является гладкой и удовлетворяет некоторым условиям согласования.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $f(t) \in C^1[0, T]$, $F_0 \in C^2[0, T]$ (T -любое фиксированное положительное число) и выполнено условие согласования

$$F_0(0) = -f(0).$$

Тогда обратная задача имеет единственное решение $k(t) \in [0, T]$.

Для доказательства теоремы обратная задача (1)-(3) сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений относительно функций u, k . Затем глобальная разрешимость этой нелинейной системы исследуется в пространстве непрерывных функций с помощью метода, близкого к содержащемуся в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухгейм А.Л., Калинина Н.И. *Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти* // Сиб.мат.журн.38(1997), 5, с.1018-1033.

Операционное исчисление в дифференциальных алгебрах

В. В. Жаринов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

`zharinov@mi.ras.ru`

Предлагается техника, сводящая решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в дифференциальных алгебрах к решению соответствующих систем алгебраических уравнений. Показано, что в классической дифференциальной алгебре [1, 2] такая программа не может быть реализована, в силу отсутствия нетривиальных экспонент, в то время как представляющая главный интерес дифференциальная алгебра Ли вертикальных дифференцирований классической дифференциальной алгебры обладает полным спектром экспонент, и на ней оказывается возможным развить эффективное операционное исчисление (вторичное операционное исчисление). Изложение иллюстрируется рядом примеров. Подробно см. [3]

Список литературы

- [1] J.F. Ritt, Differential algebra, A. M. S. Colloq. Publ., **33**, New York, 1950.
- [2] I. Kaplansky, An introduction to differential algebra, Hermann, Paris, 1957.
- [3] V.V. Zharinov, Operational calculus in differential algebras, Integral Transforms and Special Functions, 1998, Vol. 7, No. 1-2, pp. 145-158.

О численно устойчивом алгоритме для больших разреженных задач регуляризации Тихонова

А. И. Жданов

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. С.П. Королёва, Россия

zhdanov@smr.ru

Известно, что метод регуляризации А.Н. Тихонова широко используется для решения неустойчивых вычислительных задач математической физики.

Рассмотрим стандартную (конечномерную) задачу Тихоновской регуляризации:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \{ \|Au - f\|_2^2 + \alpha \|u - u_0\|_2^2 \}, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f \in \mathbb{R}^m$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, $\|\cdot\|_2$ — евклидова векторная норма, u_0 — априори заданное "пробное" решение.

Для численного решения задачи (1) в настоящее время используются следующие основные прямые методы [1].

1. Метод, основанный на регуляризованной системе нормальных уравнений (уравнениях Эйлера), в соответствии с которым решение задачи (1) находится как решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$(A^T A + \alpha I_n)u = A^T f + \alpha u_0, \quad (2)$$

где T — знак транспонирования, I_n — единичная матрица порядка n .

2. Метод, основанный на QR-разложениях (с помощью вращений Гивенса или отражений Хаусхолдера).

3. SVD-методы, основанные на сингулярном разложении.

Известно, что наиболее быстрым (по числу арифметических операций) является метод регуляризованных систем нормальных уравнений (1), за ним следует QR-метод и только потом методы основанные на SVD.

Однако вычисленные на компьютере (в арифметике с плавающей точкой) решения \tilde{u}_α , для перечисленных методов, различаются по точности. Гарантированные оценки погрешностей $\|\tilde{u}_\alpha - u_\alpha\|_2$ компьютерных решений \tilde{u}_α для этих методов зависят от числа обусловленности задачи (1). Здесь u_α – точное (вычисленное в точной арифметике) решение задачи регуляризации (1).

Если задача (1) – хорошо обусловленная, т.е. её спектральное число обусловленности $\kappa_2 \ll 1/\varepsilon_{\text{mach}}$, где $\varepsilon_{\text{mach}}$ – машинное эpsilon, то метод регуляризованных систем нормальных уравнений (2) по точности сравним с прочими методами. Если (1) не является хорошо обусловленной, но и не близка к задаче неполного ранга, то можно воспользоваться QR-разложением. В случае, когда $\kappa_2 \approx 1/\varepsilon_{\text{mach}}$, непревзойдённым методом получения осмысленного решения задачи (1) является лишь SVD-метод. Однако в случае больших разреженных матриц A практическое использование SVD-метода сильно ограничено.

В докладе предлагается метод преобразования исходной задачи регуляризации (1) к эквивалентной ей расширенной регуляризованной нормальной системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha^{1/2}I_m & A \\ A^T & -\alpha^{1/2}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2}r \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -\alpha^{1/2}u_0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Показано, что метод, основанный на решении (3), является конкурентно способным по отношению к SVD (в смысле точности компьютерных решений \tilde{u}_α) при решении плохо обусловленных задач регуляризации (1), а также СЛАУ неполного численного ранга [2]. В то же время, предлагаемый метод имеет существенные преимущества перед SVD-методом для больших разреженных матриц A . Этот метод может быть использован для решения задач Тихоновской регуляризации на основе расширенных систем рассмотренных в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов В.А. Алгоритмические основы методов решения некорректных задач // Вычисл. методы и программир. 2003. Т. 45. С. 130–141.
2. Жданов А.И. Об одном численно устойчивом алгоритме решения систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16). С. 149–153.
3. Жданов А.И. Регуляризация неустойчивых конечномерных линейных задач на основе расширенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 11. С. 1919–1927.

Устойчивость пограничного слоя неравновесного газа на плоской пластине

И. П. Завершинский, В. Н. Кнестяпин, Е. Я. Коган

*Самарский государственный аэрокосмический университет
им. С.П.Королева, Россия*

zav@smr.ru

В настоящей работе изучается влияние неравновесного заселения колебательных степеней свободы на устойчивость пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой сверхзвуковым потоком.

Найден сдвиг критического числа Рейнольдса Re_C и показано, что в неравновесной среде его значение может заметно уменьшаться с ростом степени неравновесности

$$\tilde{Re}_C \approx \tilde{Re}_C^e \left[1 + 4\Delta_C \left(1 + \frac{d \ln ImK_1}{d \ln c} \right)^{-1} \right] \frac{\sqrt{1 - \tilde{M}_\infty^2 (1 - c)^2}}{\sqrt{1 - \tilde{M}_0^2 (1 - c)^2}},$$

где \tilde{Re}_C^e - критическое число Рейнольдса в равновесной среде, $\tilde{M} = M \cos \theta$ - число Маха, θ - угол распространения возмущений по отношению к невозмущенному потоку,

$$ImK_1 \approx -\pi \left[T_0^2 (U')^{-3} \Xi^{-2} (\Xi U' / T_0)' \right]_{y=y_c},$$

$$\Delta = (1 - c) \tilde{M}_0^4 r_0 \left(2 \tilde{Re}_C^e \Xi(1) ImK_1 \sqrt{1 - \tilde{M}_0^2 (1 - c)^2} \right)^{-1},$$

$$\Xi(y) = \exp \int_0^y (D / b \gamma_\infty) dy, \quad D = [(C_{P0} - C_{P\infty}) T' - E] / C_{V\infty} T_1',$$

$r_0 = \mu_0 / \eta \gg 1$, $\mu_0 = \tau_0 C_{V\infty} (C_{V\infty} / C_{V0}) (1 - \gamma_0 / \gamma_\infty)$ - коэффициент второй вязкости, индексом w обозначены значения величин на поверхности пластины. В двухмерном случае это выражение переходит в полученное в [1]. Здесь мы полагали, что число Маха ограничено условием $M \leq 2$. Численные расчеты показывают следующее. В области малых чисел Маха $M < M$ при любых рассматриваемых степенях неравновесности S наиболее опасными являются двумерные возмущения, а увеличение M приводит к понижению устойчивости пограничного слоя. В области больших чисел Маха увеличение M приводит к увеличению Re_C . При $M > M_B$ наиболее

опасными становятся трехмерные возмущения. Эти результаты согласуются с результатами [6] при $S = 0$. Значение числа Маха M уменьшается с ростом степени неравновесности. Значение критического числа Рейнольдса Re_C при $\theta = const$ заметно падает с ростом степени неравновесности S , что соответствует предсказаниям работы [2] сделанным при $\theta = 0$.

При заданной степени неравновесности $S = const$ существует такое значение угла θ^* , что критическое число Рейнольдса Re_C минимально, что соответствует наиболее опасному углу распространения возмущений. Этот результат качественно совпадает с приведенным в [3]. Значение Re_C падает с ростом S .

В настоящей работе с использованием методов Флоке и Галеркина получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для описания поведения мод на стадии вторичной неустойчивости. Показано, что угол распространения наиболее опасных возмущений близок к значению в равновесной среде и слабо падает с ростом степени неравновесности $S = Q\tau/T_0$. Методом теории многих масштабов был получен безразмерный инкремент вторичной неустойчивости, обезразмеренный на инкремент вторичной неустойчивости в равновесной среде ($S = 0$).

Из полученного выражения видно, что значение инкремента растет с ростом степени неравновесности. Наконец, заметим, что это значение максимально при некотором значении угла распространения возмущений по отношению к невозмущенному потоку, что качественно совпадает с результатами в равновесных средах.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-96608 и аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006-2008 годы)».

1. Молевич Н.Е. Асимптотический анализ устойчивости плоскопараллельного пограничного слоя сжимаемого релаксирующего газа // Известия РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 82.

2. Koch W., Bertolotti F., Stolte A., Hein S. Nonlinear equilibrium solutions in a three-dimensional boundary layer and their secondary instability // J. Fluid. Mech. 2000. V.406. P. 131-174.

3. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.

Асимптотически однородные обобщенные функции

Б. И. Завьялов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

`bzavial@mi.ras.ru`

Обобщенные функции, обладающие (квази)асимптотикой по специальным группам преобразований аргументов этих функций в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются симптотически однородными по этим группам преобразований. В частности, к этим функциям принадлежат все "квазиоднородные" обобщенные функции. В докладе приводится полное описание асимптотически однородных функций по группе преобразований, определяемой вектором в положительном октанте. Описание дается как в случае критических, так и в некритических порядков. Для этого вводятся и изучаются специальные пространства обобщенных функций, обобщающие пространства обобщенных функций с носителями на положительной полуоси. Полученные результаты применяются для изучения особенностей голоморфных функций в трубчатых областях. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00144а и грант НШ-3224.2008.1

Приближенное решение обратной задачи спектрального анализа для оператора Лапласа

Г. А. Закирова

Магнитогорский государственный университет, Россия

`zakirova81@mail.ru`

А. И. Седов

Магнитогорский государственный университет, Россия

`sedov@masu.ru`

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, N\}, \quad a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0 , порожденный краевой задачей Неймана:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Pi} = 0,$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, ν — нормаль к границе $\partial \Pi$ прямоугольника Π .

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\beta \geq \frac{N}{2}$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Иногда, для удобства, упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_N)}$ оператора T и связанные с ними спектральные объекты будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет обозначать кратность ν_t собственного числа λ_t , т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$.

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(\Pi)$. Обозначим через μ_m собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_m — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Рассмотрим следующую обратную задачу спектрального анализа Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$, отвечающая некоторому условию "близости" к спектру оператора T . При различных степенях $\beta \geq 1$ требуется доказать существование оператора $T + P$ такого, что спектр $\sigma(T + P)$ "совпадает" с последовательностью $\{\xi_t\}_{t=1}^\infty$.

Введем обозначения:

$$V = \prod_{j=1}^n a_j;$$

$$r_t = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}, \quad r_0 = \inf_t r_t;$$

$$S = \left(\sum_{t=1}^\infty r_t^2 \left(\max_{\lambda \in \gamma_{r_t}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)^2 \right)^{1/2};$$

$$0 < r < \min\left\{ \frac{1}{3S}; r_0 \right\};$$

Терема 1. Пусть $\beta > \frac{3N}{4}$, $r < \min\{r_0, \frac{1}{S\sqrt{2^N}}\}$, $\omega = \sqrt{2^N} S r$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^\infty \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2} (1 - \omega),$$

то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k,$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Пусть далее a_j^2/a_k^2 — иррациональное число, $k \neq j$. Тогда спектр оператора $T + P$ — простой.

Теорема 2. Пусть P — оператор умножения на потенциал, найденный в теореме 2. Если $r < \frac{\sqrt{V}}{2^{N+2}S}$, то этот оператор единственный.

Теорема 3 Пусть $N=2$. Тогда

$$\|p - p_1\|_{L_\infty} \leq 4 \cdot 10^{-3},$$

где p_1 — первое приближение решения p поставленной обратной задачи.

Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка

А. Н. Зарубин

ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Россия
aleks_zarubin@mail.ru

О. В. Лаштабега

ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Россия
tanda80@yandex.ru

Уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sgn}(xy) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - H(y-h) R_y^h - \right. \\ \left. - H(x-\tau) R_x^\tau \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, $R_x^\tau (R_y^h)$ — оператор сдвига по переменной $x (y) : R_x^\tau g(x, y) = g(x - \tau, y)$ ($R_y^h g(x, y) = g(x, y - h)$), $0 < h, \tau \equiv \text{const}$,

рассмотрим в области $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2$, если $D_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{1k}$,

$D_2 = \bigcup_{l=0}^{+\infty} D_{2l}$, $D_3 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$,

$J_1 = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$, $J_2 = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$, а
 $D_{1k} = \{(x, y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\frac{\tau}{2} < y < 0\}$,
 $D_{2l} = \{(x, y) : -\frac{h}{2} < x < 0, lh - x < y < (l+1)h + x\}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D} \setminus \{y = x\}) \cap C^3(D \setminus \{y = x\})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D \setminus \{y = x\}$, граничным условиям

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = 0, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{y=k\tau-x} = \psi_{1k}(x), u(x, y)|_{y=k\tau-x} = \delta_{1k}(x), \quad (2)$$

$$k\tau \leq x \leq (2k+1)\frac{\tau}{2};$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \right|_{x=lh-y} = \psi_{2l}(y), u(x, y)|_{x=lh-y} = \delta_{2l}(y), \quad (3)$$

$$lh \leq y \leq (2l+1)\frac{h}{2};$$

$$u(x, y)|_{y=x-(k+1)\tau} = \phi_{1k}(x), (2k+1)\frac{\tau}{2} \leq x \leq (k+1)\tau; \quad (4)$$

$$u(x, y)|_{x=y-(l+1)h} = \phi_{2l}(y), (2l+1)\frac{h}{2} \leq y \leq (l+1)h, \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u_y^{(i)}(x, +0) = u_y^{(i)}(x, -0) \quad (i = \overline{0, 3}), u_{xx}(x, +0) = u_{xx}(x, -0), \quad (6)$$

$$u_{xxy}(x, +0) = u_{xxy}(x, -0) \text{ на линии } J_1;$$

$$u_x^{(j)}(+0, y) = u_x^{(j)}(-0, y) \quad (j = \overline{0, 3}), u_{yy}(+0, y) = u_{yy}(-0, y), \quad (7)$$

$$u_{yyx}(+0, y) = u_{yyx}(-0, y) \text{ на линии } J_2,$$

где n – внешняя нормаль, а функции $\psi_{1k}(x)$, $\psi_{2l}(y)$, $\phi_{1k}(x)$, $\phi_{2l}(y)$, $\delta_{1k}(x)$, $\delta_{2l}(y)$ – трижды непрерывно дифференцируемы, причем $\delta_{10}(0) = \delta_{20}(0)$, $\delta_{1k}((2k+1)\frac{\tau}{2}) = \phi_{1k}((2k+1)\frac{\tau}{2})$, $\delta_{2l}((2l+1)\frac{h}{2}) = \phi_{2l}((2l+1)\frac{h}{2})$, $\phi_{1k}((k+1)\tau) = \delta_{1(k+1)}((k+1)\tau)$, $\phi_{2l}((l+1)h) = \delta_{2(l+1)}((l+1)h)$. Производные третьего порядка функции $u(x, y)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках $(k\tau, 0)$, $(0, lh)$, $(k, l = 0, 1, 2, \dots)$.

Если

$$v(x, y) = u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y), \quad (8)$$

то из задачи 1 следует

Задача 2. Найти в области D функцию $v(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D \setminus (J_1 \cup J_2))$, удовлетворяющую уравнению

$$v_{xx}(x, y) + \operatorname{sgn}(xy)v_{yy}(x, y) - \\ - H(y - h)v(x, y - h) - H(x - \tau)v(x - \tau, y) = 0,$$

граничным условиям

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} v(x, y) = 0, x \geq 0, y \geq 0,$$

$$v(x, y)|_{y=k\tau-x} = \sqrt{2}\psi'_{1k}(x) = \bar{\psi}_{1k}(x), k\tau \leq x \leq (2k+1)\frac{\tau}{2},$$

$$v(x, y)|_{x=lh-y} = -\sqrt{2}\psi'_{2l}(y) = \bar{\psi}_{2l}(y), lh \leq y \leq (2l+1)\frac{h}{2},$$

условиям сопряжения

$$v(x, -0) = v(x, +0) = \omega_1(x); \quad v(-0, y) = v(+0, y) = \omega_2(y);$$

$$v_y(x, -0) = v_y(x, +0) = \nu_1(x); \quad v_x(-0, y) = v_x(+0, y) = \nu_2(y),$$

где $\bar{\psi}_{1k}(x), \bar{\psi}_{2l}(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $\bar{\psi}_{10}(0) = \bar{\psi}_{20}(0)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in [k\tau, (2k+1)\frac{\tau}{2}]} |\bar{\psi}_{1k}(x)| = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \max_{y \in [lh, (2l+1)\frac{h}{2}]} |\bar{\psi}_{2l}(y)| = 0.$$

Доказана теорема существования и единственности регулярного решения $v(x, y)$ задачи 2.

По найденной функции $v(x, y)$ в силу (8), решение $u(x, y)$ задачи 1 построено как совокупность решений задач Гурса в областях $D_{1k}(D_{2l})$ при условиях (2), (4) ((3), (5)), а в области D_3 – с помощью условий сопряжения (6) – (7) и решения задач Гурса.

p -Адическая математическая физика и коммутационные соотношения

Е. И. Зеленов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

evgeny.zelenov@gmail.com

Краткая аннотация доклада: Предполагается осветить следующие вопросы: 1. Формулировка Вейля для p -адической квантовой механики 2. Квантование динамики и метаплектическое представление 3. Представление Фока и автоморфные функции 4. Задача о полноте когерентных состояний 5. p -Адический индекс Маслова 6. Задача об эквивалентности представлений коммутационных соотношений в бесконечномерном случае 7. О связи p -адической и вещественной квантовых механик.

Синтез и распределение полимерных микро- и наночастиц в плазмохимической системе с искусственной гравитацией

В. И. Зынь

*Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия*

zyn37@mail.ru

Механизм генерации и седиментации полимерного аэрозоля в гомогенной газоразрядной плазме моделирован четырьмя уравнениями: 1) неразрывности для материального потока, 2) функции источника, 3) роста частицы во времени, 4) падения растущей частицы в полях тяготения и сопротивления среды. Получены функции распределения аэрозоля по высоте и размерам.

Геометрическое моделирование жидкости

М. Г. Иванов

Московский физико-технический институт, Россия

mg@mi.ras.ru

Рассмотрим следующее действие для модели типа нелинейной электродинамики с потенциалом, задаваемым $(D - n - 1)$ -формой I ($I_{M_1 \dots M_{D-n}} = I_{[M_1 \dots M_{D-n}]}$), в D -мерном пространстве-времени:

$$S_1[I] = \int d^D x \sqrt{|g|} L(\|J\|),$$

где $J = dI$. Из определения J следует «первая пара уравнений Максвелла» $dJ = 0$.

Здесь используются обозначения, в которых

$$\begin{aligned} (dA)_{M_0 M_1 \dots M_k} &= (k+1) \partial_{[M_0} A_{M_1 \dots M_k]}, \\ (A, B) &= \frac{1}{k!} A_{M_1 \dots M_k} B^{M_1 \dots M_k}, \quad \|A\|^2 = (A, A), \\ (\delta A)^{M_1 \dots M_{k-1}} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{M_k} \left(\sqrt{|g|} A^{M_1 \dots M_{k-1} M_k} \right). \end{aligned}$$

Вариация действия по потенциалу I даёт уравнения поля («вторая пара уравнений Максвелла»)

$$\delta \left(J \frac{L'(\|J\|)}{\|J\|} \right) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{M_{D-n}} \left(\sqrt{|g|} J^{M_1 \dots M_{D-n}} \frac{L'(\|J\|)}{\|J\|} \right) = 0. \quad (1)$$

Мы можем избавиться от лишнего, по сравнению с линейной теорией, множителя $\frac{L'(\|J\|)}{\|J\|}$, модифицировав метрику пространства-времени. Рассмотрим конформное преобразование метрики:

$$\begin{aligned} g_{MN} &\rightarrow \tilde{g}_{MN} = F^2 g_{MN}, \\ J_{M_1 \dots M_{D-n}} &\rightarrow J_{M_1 \dots M_{D-n}}, \\ J^{M_1 \dots M_{D-n}} &\rightarrow \tilde{J}^{M_1 \dots M_{D-n}} = F^{-2(D-n)} J^{M_1 \dots M_{D-n}}, \\ \|J\| &\rightarrow \|\tilde{J}\| = F^{-(D-n)} \|J\|. \end{aligned}$$

Если теперь выбрать конформный множитель F , удовлетворяющим условию $F^{2n-D} = \frac{L'(\|J\|)}{\|J\|}$, то в метрике \tilde{g}_{MN} уравнение поля примет вид $\tilde{\delta} \tilde{J} = 0$. Т.е. в новой метрике мы получим стандартные уравнения для поля свободной (без источников) замкнутой $(D-n)$ -формы J . В некоторых случаях возможны и другие полезные преобразования метрики. Так метрика невращающейся чёрной дыры при рассмотрении электромагнитного поля может быть заменена плоской метрикой Минковского.

Если выбрать конформный множитель F иначе, удовлетворяющим условию $F^n = L'$, то в метрике \tilde{g}_{MN} уравнение поля примет вид

$$\tilde{\delta} \left(\frac{\tilde{J}}{\|\tilde{J}\|} \right) = 0. \quad (2)$$

При выполнении условия

$$\begin{aligned} J = J_\varphi = d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^{D-n} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J_{M_1 \dots M_{D-n}} = (D-n)! \partial_{[M_1} \varphi^1 \dots \partial_{M_{D-n}]} \varphi^{D-n} &\quad (3) \end{aligned}$$

уравнение (1) превращается в уравнение потенциального течения мембранной жидкости (при $n = 1$ — обычной жидкости), состоящей из непересекающихся мембран, чьи мировые поверхности задаются условиями $\varphi = const$, а давление поперёк мембраны в сопутствующих координатах $p_\perp = L - \|J\| \cdot L'$. В частности уравнение (2) описывает мембранную жидкость без давления («мембранную пыль»).

Мы можем отказаться от условия потенциальности для течения (3) модифицировав действие с помощью лагранжева множителя K :

$$S_2[I, \varphi, K] = \int d^D x \sqrt{|g|} [L(\|J\|) + (K, J - J_\varphi)].$$

Возможность обнулять давление с помощью конформного преобразования метрики при этом по-прежнему остаётся.

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Список литературы

[1] M.G. Ivanov, *Membrane fluids as field sources*, Grav.Cosmol. 13, (2007), №1(49), 16-22; hep-th/0412318

Система обобщенных уравнений типа Абеля для смешанной задачи теории упругости

Р. Р. Исмагилова

Самарский государственный университет, Россия

isriri@mail.ru

В данной работе рассматриваются и изучаются операторы, обобщающие известные операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля на матричный порядок. Показано, что с помощью свойств матричное полное уравнение Абеля редуцируется к характеристическому сингулярному уравнению с матричными коэффициентами с ядром Коши для неизвестной вектор-функции.

Выписываются некоторые достаточные условия на матрицы-коэффициенты и матрицу-порядок, при выполнении которых система уравнений разрешима в квадратурах.

В качестве приложений рассматривается смешанная задача теории упругости — двумерная задача Гриффитса для трещин [1].

Полная система обобщенных уравнений типа Абеля на отрезке (a, b) записывается с помощью операторов дробного интегрирования матричного порядка и имеет вид:

$$A_1(x)I_{a+}^G A_2(x)f(x) + B_1(x)I_{b-}^G B_2(x)f(x) = g(x),$$

где $A_k(x)$, $B_k(x)$ — функциональные матрицы размерности $n \times n$, $k = 1, 2, \dots$; $f(x)$, $g(x)$ — вектор-функции; G — симметрическая постоянная матрица; I_{a+}^G , I_{b-}^G — обобщение оператора дробного интегродифференцирования [2] на матричный порядок.

Используя доказанные свойства операторов I_{a+}^G , I_{b-}^G система Абеля сводится к матричной задаче Римана. При $n = 2$ выделяется класс систем уравнений разрешимых в замкнутом виде.

Список литературы

- [1] Lowengrub, M. Systems of Abel type integral equations//Function theoretic methods in differetial equations / R.P. Gilbert, R.G. Weinacht, eds.Pitman Publ. 1976, 277-296.
- [2] Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

Задача Коши на не глобально гиперболических многообразиях

Т. Ишиватари

Математический институт им. В.А. Стеклова, Россия

`takumi@mi.ras.ru`

Рассматриваются решения задачи Коши для гиперболических уравнений на не глобально гиперболических многообразиях, содержащих замкнутые времени-подобные кривые (машины времени), см.[1].

Мы рассматривали задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0, \\ u(t, x)|_{t=0} &= u_0(x), \\ u_t(t, x)|_{t=0} &= u_1(x),\end{aligned}$$

на $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\}$ где

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\} \\ \gamma_1 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_1, b_1 < t < b_1 + l\} \\ \gamma_2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_2, b_2 < t < b_2 + l\} \\ a_2 &> a_1, \quad b_2 > b_1 + l + a_2 - a_1, \quad l > 0.\end{aligned}$$

с условиями сшивки,

$$\begin{aligned}u(t, x)|_{x=a_1-0} &= u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \\ \partial_x u(t, x)|_{x=a_1-0} &= \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \\ u(t, x)|_{x=a_1+0} &= u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0}, \\ \partial_x u(t, x)|_{x=a_1+0} &= \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0},\end{aligned}$$

Доказано, что решение этой задачи Коши существует в следующем виде,

$$u(t, x) = f(x - t + a_2 - a_1 + b_1 - b_2) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_1, \quad (1)$$

$$u(t, x) = f(x - t + a_1 - a_2 + b_2 - b_1) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_2, \quad (2)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x + a_2 - a_1 + b_2 - b_1), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_3, \quad (3)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x + a_1 - a_2 + b_1 - b_2), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_4, \quad (4)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad (5)$$

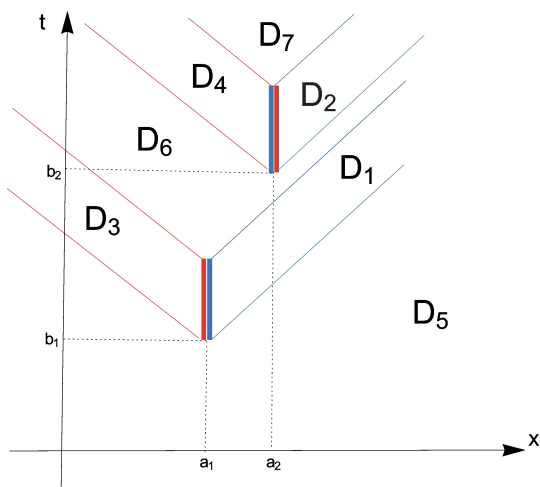
$$i = 5, 6, 7,$$

где

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right], \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right],$$

$$u_0 \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Области \mathcal{D}_i ($i = 1, \dots, 7$), которые удовлетворяют $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\} = \bigcup_{i=1}^7 \mathcal{D}_i$, определяются как в рисунке ниже.



Области $\mathcal{D}_i, i = 1, 2, \dots, 7$

Это решение разрывно и в определенном смысле единственно для произвольных начальных данных u_0 и u_1 , заданных на прямой (гиперповерхности) в момент времени, предшествующий образованию замкнутых времени-подобных кривых.

Если же гиперповерхность начальных данных пересекает область, содержащую замкнутые времени-подобные кривые, то решение задачи Коши существует только для начальных данных, удовлетворяющих определенному условию самосогласованности.

Доклад основан на совместной работе с И.Я.Арефьевой и И.В.Воловичем, которая будет опубликована в журнале «Теоретическая и Математическая Физика».

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

[1] I.Ya.Arefeva , I.V.Volovich, "Time Machine at the LHC", Internat J. Geom. Methods Mod. Phys., 5:4 (2008), 641-651; arXiv:0710.2696.

Cauchy Problem on Non-globally Hyperbolic Spacetimes

T. Ishiwartari

Steklov Mathematical Institute

takumi@mi.ras.ru

Solutions of the Cauchy problem on globally hyperbolic spacetimes are well known. Here we study solutions of the Cauchy problem for hyperbolic equations on non-globally hyperbolic spacetimes, which contain closed timelike curves (time machines), see [1].

We considered the Cauchy problem for the wave equation

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \\ u(t, x)|_{t=0} &= u_0(x), \\ u_t(t, x)|_{t=0} &= u_1(x), \end{aligned}$$

on $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\}$, where

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\} \\ \gamma_1 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_1, b_1 < t < b_1 + l\} \\ \gamma_2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2 | x = a_2, b_2 < t < b_2 + l\} \\ a_2 &> a_1, \quad b_2 > b_1 + l + a_2 - a_1, \quad l > 0. \end{aligned}$$

with the conditions for identification,

$$\begin{aligned} u(t, x)|_{x=a_1-0} &= u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \\ \partial_x u(t, x)|_{x=a_1-0} &= \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2+0}, \\ u(t, x)|_{x=a_1+0} &= u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0}, \\ \partial_x u(t, x)|_{x=a_1+0} &= \partial_x u(t + b_2 - b_1, x)|_{x=a_2-0}, \end{aligned}$$

It is proved, that a solution for such Cauchy problem exists and it is given by the following formulas,

$$u(t, x) = f(x - t + a_2 - a_1 + b_1 - b_2) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_1, \quad (1)$$

$$u(t, x) = f(x - t + a_1 - a_2 + b_2 - b_1) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_2, \quad (2)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x + a_2 - a_1 + b_2 - b_1), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_3, \quad (3)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x + a_1 - a_2 + b_1 - b_2), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_4, \quad (4)$$

$$u(t, x) = f(x - t) + g(t + x), \quad (t, x) \in \mathcal{D}_i, \quad (5)$$

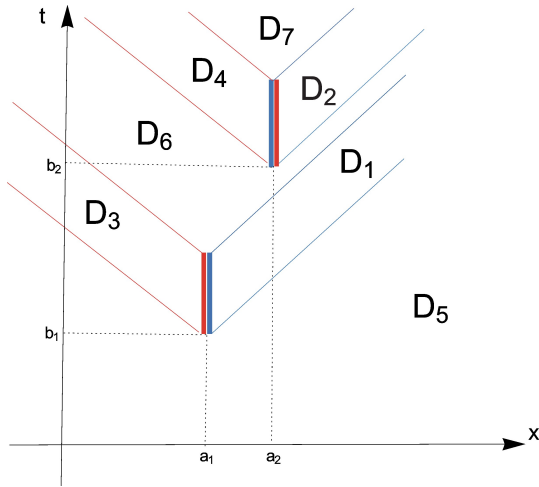
$i = 5, 6, 7,$

where

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) - \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right], \quad g(x) = \frac{1}{2} \left[u_0(x) + \int_{x_0}^x u_1(s) ds \right],$$

$$u_0 \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Regions \mathcal{D}_i ($i = 1, \dots, 7$) are defined by $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{\bar{\gamma}_1 \cup \bar{\gamma}_2\} = \bigcup_{i=1}^7 \mathcal{D}_i$, as in the figure below.



Regions \mathcal{D}_i , $i = 1, 2, \dots, 7$

This solution is discontinuous and in a specific sense it is unique for arbitrary initial conditions u_0 and u_1 , which are given on a line (hypersurface) at time, that precedes the formation of closed timelike curves. If the hypersurface of initial conditions intersects the region containing closed timelike curves, then the solution of the Cauchy problem exists only for such initial conditions, that satisfy a certain requirement of self-consistency.

This talk is based on the research with I.Ya.Arefeva and I.V.Volovich, which will be published in the journal "Theoretical and Mathematical Physics".

[1] I.Ya.Arefeva , I.V.Volovich, "Time Machine at the LHC", Internat J. Geom. Methods Mod. Phys., 5:4 (2008), 641-651; arXiv:0710.2696.

Качественный анализ уравнений плазмохимической кинетики

А. К. Кайракбаев

*Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия*

kairak@mail.ru

Постановка задачи

Доклад содержит сведения о результатах изучения основных свойств непрерывных дифференцируемых решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений из работы [1. с.516]:

$$\begin{cases} \frac{d[M]}{dt} = -[k_0 n_e][M] - ([k_1][R_1] + [k_2][R_2]) + [k_{12}][R_1][R_2], \\ \frac{d[R_1]}{dt} = [k_0 n_e][M] - [k_1^1][R_1] - 2[k_1][R_1]^2 - [k_{12}][R_1][R_2], \\ \frac{d[R_2]}{dt} = [k_0 n_e][M] - [k_2^1][R_2] - 2[k_2][R_2]^2 - [k_{12}][R_1][R_2]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $[M]$ – концентрация молекул исходного вещества, $[R_i]$ – концентрация радикалов i -го типа, n_e – концентрация электронов, $[k_0 n_e]$, $[k_1]$, $[k_2]$, $[k_{12}]$, $[k_1^1]$, $[k_2^1]$ – положительные постоянные (неизвестные) коэффициенты. Концентрация вещества и радикалов измеряются в (m^{-3}) . Размерность $[k_0 n_e]$, $[k_i^1] \sim (c^{-1})$, $[k_i]$, $[k_{12}] \sim (m^3 c^{-1})$, $\frac{d[M]}{dt}$, $\frac{d[R_i]}{dt} \sim (m^{-3} c^{-1})$. Переходя в (1) к безразмерным величинам с помощью соотношений $[M] = (1m^{-3}) \cdot M$, $[R_i] = (1m^{-3}) \cdot R_i$, $[k_0 n_e] = (1c^{-1}) \cdot k_0 n_e$, $[k_i] = (1m^3 c^{-1}) \cdot k_i$, $[k_i^1] = (c^{-1}) \cdot k_i^1$, $[k_{12}] = (1m^3 c^{-1}) \cdot k_{12}$, $t = (1c)\tau$, $\frac{d[M]}{dt} = (1m^3 c^{-1}) \cdot \frac{dM}{d\tau}$, $\frac{d[R_i]}{dt} = (1m^3 c^{-1}) \cdot \frac{dR_i}{d\tau}$, $(\dot{}) = \frac{d()}{d\tau}$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{M} = -k_0 n_e M - (k_1 R_1 + k_2 R_2) + k_{12} R_1 R_2, \\ \dot{R}_1 = k_0 n_e M - k_1^1 R_1 - 2k_1 R_1^2 - k_{12} R_1 R_2, \\ \dot{R}_2 = k_0 n_e M - k_2^1 R_2 - 2k_2 R_2^2 - k_{12} R_1 R_2. \end{cases} \quad (2)$$

Положим $G = [0, 1]^3$; $x = (M, R_1, R_2)$, $x_0 = (M_0, R_{01}, R_{02})$, $f(x) =$

$\begin{pmatrix} -k_1 R_1 M - k_2 R_2 M + k_{12} R_1 R_2 \\ -2k_1 R_1^2 - k_{12} R_1 R_2 \\ -2k_2 R_2^2 - k_{12} R_1 R_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -k_0 n_e & 0 & 0 \\ k_0 n_e & -k_1^1 & 0 \\ k_0 n_e & 0 & -k_2^1 \end{pmatrix}$. Пусть $x_0 \in G$ и $0 \leq R_{01}, R_{02} < M_0 \leq 1$. Теперь задачу запишем коротко

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

Вспомогательные утверждения

Лемма 1. При любых положительных $k_0 n_e, k_1, k_2, k_{12}, k_1^1, k_2^1$ и любых $x, y \in G$ правая часть системы (3) удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L = \|A\| + 144h$, где $h = \max\{k_1, k_2, k_{12}\}$

Лемма 2. При любых положительных $k_0 n_e, k_1, k_2, k_{12}, k_1^1, k_2^1$ и любых $x \in G$ функция $f(x)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{aligned} j) & f(\lambda x) = \lambda^2 x, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \\ jj) & \exists C > 0 \text{ такое, что } \|f(x)\| \leq C \|x\|^2; \\ jjj) & \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма 3. Каждое непрерывное дифференцируемое решение задачи (3), для которого $M_0 > 0, R_{01} \geq 0, R_{02} \geq 0$ на интервале $[0; \infty)$ равномерно ограничено и неотрицательно, если $k_0 n_e, k_1, k_2, k_{12}, k_1^1, k_2^1$ положительные.

Лемма 4. Каждое непрерывное дифференцируемое решение задачи (3) представимо в виде $x(\tau) = Y(\tau)x_0 + Y(\tau) \int_0^\tau Y^{-1}(s)f(s)ds$,

$$Y(\tau) = \begin{pmatrix} e^{(-k_0 n_e \tau)} & 0 & 0 \\ \frac{k_0 n_e}{k_1^1 - k_0 n_e} (e^{(-k_0 n_e \tau)} - e^{(-k_1^1 \tau)}) & e^{(-k_1^1 \tau)} & 0 \\ \frac{k_0 n_e}{k_2^1 - k_0 n_e} (e^{(-k_0 n_e \tau)} - e^{(-k_2^1 \tau)}) & 0 & e^{(-k_1^1 \tau)} \end{pmatrix}.$$

Более того, $\int_0^{+\infty} \|Y(\tau)\| d\tau = \frac{1}{k_0 n_e} + \frac{2}{k_1^1} + \frac{2}{k_2^1}$.

Основной результат

Теорема. Каждое непрерывное дифференцируемое решение задачи (3) удовлетворяет неравенствам $0 \leq M(\tau) \leq 1, 0 \leq R_1(\tau) \leq 1, 0 \leq R_2(\tau) \leq 1$ при любом $\tau \in [0; \infty)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $0 \leq R_{01}, R_{02} < M_0 \leq 1$;
- 2) $k_{12} \leq k_0 n_e + k_1 + k_2$;
- 3) $k_0 n_e \leq \min\{k_1^1 + 2k_1, k_2^1 + 2k_2\}$;
- 4) $k_0 n_e, k_1, k_2, k_{12}, k_1^1, k_2^1$ — постоянные и положительные.

Литература

1. L.M.Blinov, etc. Tetrochlorosilane Consumption in Radio Frequency Glow Discharge. Plasma Chem. Plasma Process. Vol. 18. No. 4. 1998.

О взаимно-однозначном соответствии между распределением Гиббса и двухчастичной функцией распределения

М. И. Калинин

*Всероссийский научно-исследовательский институт
метрологической службы, Россия*

`kalinin@vniims.ru`

Равновесная система N молекул в объёме V описывается распределением Гиббса. Нетривиальной является конфигурационная часть распределения Гиббса, которая определяется потенциальной энергией системы. Для систем с аддитивным взаимодействием вводятся приведённые частичные функции распределения [4, 2]. Обычно считается, что эти функции содержат информации о системе меньше, чем полное Распределение Гиббса. Однако доказательства этого утверждения в литературе нет.

С другой стороны, в системе с парным взаимодействием вся информация о свойствах равновесной системы определяется двумя функциями, характеризующими внешнее поле $u_1(q)$ и межмолекулярное взаимодействие $u_2(q, q')$, а также тремя внешними параметрами N, V, T . Эти величины полностью определяют распределение Гиббса. Известно также, что в системе невзаимодействующих частиц, даже при наличии внешнего поля, распределение Гиббса разлагается на произведение одночастичных функций распределения. То есть вся информация о молекулярной системе частиц без взаимодействия содержится в одночастичной функции распределения и двух внешних параметрах N и V (температура входит в одночастичную функцию распределения).

Естественно возникает предположение, что при наличии взаимодействия должна существовать совокупность двух функций, зависящих только от одной и двух конфигурационных переменных, которая полностью определяет всю информацию о системе. В работе [3] показано, что в системе с двухчастичным взаимодействием без внешнего поля существует взаимно-однозначное соответствие между распределением Гиббса и двухчастичной функцией распределения. Указана процедура вычисления распределения Гиббса через двухчастичную функцию распределения.

Здесь доказывается, что в системе с двухчастичным взаимодействием и внешним полем вся информация о системе также содержится всего в одной функции распределения – двухчастичной, через которую можно выразить распределение Гиббса, а следовательно и все остальные частичные функции распределения. Независимой от $F_2(q, q')$ функции одной конфигурационной переменной нет, которая была бы необходима для описания системы, нет. Это обстоятельство связано с тем, что полную потенциальную энергию можно переписать в виде суммы, содержащей только одну функцию двух конфигурационных переменных, которая является определённой комбинацией внешнего поля и потенциала парного взаимодействия

$$U_N(q_1, \dots, q_N) = \sum_{1 \leq j < k \leq N} \phi(q_j, q_k),$$

$$\phi(q, q') = u_2(q, q') + \frac{u_1(q) + u_2(q')}{N - 1}.$$

Это обстоятельство позволяет использовать метод работы [3] и построить обратное преобразование от двухчастичной функции распределения к полному распределению Гиббса.

Здесь также показано, что одночастичная функция распределения $F_1(q)$ и парная корреляционная функция $\kappa(q, q')$ образуют совокупность неприводимых функций, через которую выражается распределение Гиббса и может быть построена процедура его вычисления через совокупность этих двух функций и двух внешних параметров N и V . То есть, наличие такой совокупности функций и внешних параметров необходимо и достаточно для полного описания статистических свойств рассматриваемой системы.

Список литературы

- [1] Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. Избранные труды в трех томах. Т. 2, 1970, С. 99 – 196.
- [2] Р. Балеску, Равновесная и неравновесная статистическая механика, Т.1. М., Мир, 1978.
- [3] М.И. Калинин. О полноте описания равновесного канонического ансамбля двухчастичной функцией распределения. ТМФ, 2005, Т. 145, № 1, 123-132.

Как можно дополнить кванто-механическое описание физической реальности?

Т. Ф. Камалов

Московский государственный открытый университет, Россия

qubit@mail.ru

Можно ли дополнить описание квантовых микрообъектов нелокальными скрытыми переменными, не нарушая теорему фон Неймана о невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику? Какие нелокальные скрытые параметры помогут пополнить описание физической реальности? В модели, обсуждаемой в статье и представляющей собой обобщение классической физики на неинерциальные системы отсчета, рассматриваются любые системы отсчета, в том числе и неинерциальные. Такое обобщение классической физики может включать в себя как классическую физику, так и квантовую. Это достигается путем рассмотрения не систем отсчета (т.е. тело отсчета и системы координат с часами), а просто систем координат и времени как параметра. При этом система отсчета может быть любой - инерциальной или неинерциальной, что позволяет описывать сложные движения с высшими производными от ускорения. В этом случае классическая механика Ньютона является частным случаем данного обобщения и представляет собой простейший способ описания механических систем, когда высшими производными координат по времени можно пренебречь. Этому случаю соответствует не Лагранжиан $L(r, \dot{r})$, зависящий от координат и их первых производных по времени (скоростей), а обобщенный Лагранжиан $L(r, \dot{r}, \ddot{r}, \dots, \overset{(n)}{r})$, зависящий от координат, скоростей и высших производных по времени от координат, которые будем называть дополнительными переменными, добавочными слагаемыми или скрытыми переменными. Добавочные слагаемые в виде высших производных по времени от координат, объединяют классическую и квантовую физику в частные случаи обобщенной модели, когда квантовая физика учитывает дополнительные переменные, а классическая - нет. Добавочные слагаемые или дополнительные переменные в виде высших производных по времени от координат мы будем называть также скрытыми переменными или скрытыми параметрами, дополняющими описание частиц в любых системах отсчета, включая неинерциальные. Заметим, что такими скрытыми параметрами можно дополнить квантовое описание, не нарушая теорему фон Неймана, т.к. эта теорема не распространяется на случай неинерциальных систем отсчета. Применяя "Канонический Формализм Остроградского", получим $\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{r}} \right) = 0$ обобщенное уравнение Эйлера-Лагранжа.

Оно содержит добавочные слагаемые к уравнению Эйлера-Лагранжа. Обобщенное уравнение Якоби-Гамильтона для функции действия примет вид, $-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + Q$, где Q - добавочные переменные с высшими производными координат по времени. Современная физика предполагает использование преимущественно инерциальных систем отсчета, однако такую идеальную систему отсчета получить очень трудно - всегда присутствуют внешние посторонние влияния, например, в виде гравитационных сил или волн. В этом случае, принцип относительности, позволяет перейти от гравитационных сил или волн перейти к силам инерции. Например, если рассмотреть корабль с двумя наблюдателями в разных каютах, можно увидеть, что это неинерциальная система отсчета, а силы инерции (или фиктивные силы) здесь могут играть роль дополнительных параметров. В этом случае, наложение двух распределений наблюдателями дадут коэффициент корреляции, отличный от нуля, хотя каждое из двух наблюдений, казалось бы, носит случайный характер. Если не знать, что система отсчета неинерциальная и существуют дополнительные переменные в виде эффектов инерции, то не понятен нелокальный корреляционный характер, казалось бы, независимых наблюдений. Этот пример может иллюстрировать не только интерференцию частиц-корпускул, но и демонстрировать нелокальность квантовых корреляций при рассмотрении эффекта запутанности (entanglement).

Асимптотические свойства дискретного спектра самосопряжённых гиперболических операторов на двумерном торе

В. М. Каплицкий

*Южный федеральный университет, Институт прикладной
математики и информатики ВЦ РАН, Россия*

kaplitsky@donpac.ru

Исследование асимптотики функции $N_A(\lambda) = \dim P_{(-\infty, \lambda]}(A)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, где A — полуограниченный снизу самосопряжённый оператор с дискретным спектром, соответствующий некоторой эллиптической краевой задаче, $P_{(-\infty, \lambda]}(A)$ — спектральный проектор оператора A , является традиционным для классической математической физики.

Первые существенные результаты в этом направлении были получены Г. Вейлем. Например, если Ω — плоская область с достаточно гладкой

границей, а оператор $A = -\Delta$ (Δ — двумерный лапласиан) с граничным условием Дирихле на $\partial\Omega$, то

$$N_A(\lambda) = \frac{S(\Omega)}{4\pi}\lambda + O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

где $S(\Omega)$ — площадь области Ω (см. [1, 2]).

Такую же асимптотику имеет функция распределения $N_A(\lambda)$ для оператора Лапласа на двумерном торе $T^2 = \mathbb{R}^2/a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ и для оператора вида

$$A = -\Delta + Q,$$

где Q — произвольный ограниченный в $L_2(T^2)$ самосопряжённый оператор. К настоящему времени подобные задачи для эллиптических дифференциальных или псевдодифференциальных операторов различных типов детально изучены (см. [1, 2]). Изучены также спектральные асимптотики для вырождающихся эллиптических операторов. Отметим, что спектральные задачи для гиперболических дифференциальных уравнений также имеют важные физические приложения. Например, в недавних работах [3, 4] исследуются проблемы нахождения собственных функций и точечного спектра для гиперболических уравнений на псевдоримановых многообразиях, используемых в космологии. В [3, 4] отмечается, что подобные спектральные задачи имеют отношение к проблеме спектра масс элементарных частиц, причём положительные собственные значения соответствующих волновых операторов интерпретируются как квадраты масс частиц.

В данной работе получена асимптотика спектра квазипериодической краевой задачи для двумерного гиперболического уравнения в прямоугольнике $\Pi = (0, a) \times (0, b)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + q(x, y)\varphi = \lambda\varphi, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (1)$$

где $q(x, y)$ — вещественнозначная функция класса $C^2(\bar{\Pi})$. Квазипериодические краевые условия задаются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(a, y) &= \theta_1 \varphi(0, y), & 0 \leq y \leq b, \\ \varphi(x, b) &= \theta_2 \varphi(x, 0), & 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ_i ($i = 1, 2$) — комплексные постоянные такие, что $|\theta_i| = 1$. Показано, что замыкание T дифференциального оператора, заданного дифференциальным выражением (1) и определённого на гладких функциях, удовлетворяющих краевым условиям (2), является самосопряжённым оператором, причём в случае $\theta_i \neq 1$ ($i = 1, 2$) оператор T имеет компактную резольвенту и дискретный спектр. Пусть $\{\lambda_n(T)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность собственных

значений T , причём каждое из собственных значений повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность. В случае неполуограниченного оператора асимптотические свойства спектра характеризуются поведением функции

$$N_T(\lambda) = |\{\lambda_n(T) : -\lambda \leq \lambda_n(T) \leq \lambda\}|$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$ (здесь $|M|$ - число элементов конечного множества M).

В работе показано, что

$$N_T(\lambda) = \frac{S(\Pi)}{\pi^2} \lambda \ln \lambda + O(\lambda) \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Поскольку каждой квазипериодической задаче (1), (2) можно поставить в соответствие некоторый самосопряжённый оператор на двумерном торе $T^2 = \mathbb{R}^2/a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$, формула (3) определяет также асимптотику спектра модельного самосопряжённого гиперболического оператора второго порядка на двумерном торе с гладкими коэффициентами. Интересно отметить, что аналогичную асимптотику (с точностью до числового множителя) имеет функция распределения нулей ζ -функции Римана, определяемая как число $N(\lambda)$ нулей функции $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $-\lambda \leq \operatorname{Im} s \leq \lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений, Итоги науки и техники, Математический анализ, т.14, 1977, стр.5-58.
- [2] Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, Москва, Наука, 1978.
- [3] Волович И.В., Козлов В.В. О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна-Гордона на многообразиях, Доклады РАН, 2006, т.408, №3, с.317-320.
- [4] V.V.Kozlov, I.V.Volovich, Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., v.3, issue 7(2006), p.1349-1357.
- [5] Маркус А.С., Мацаев В.И. Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М.В.Келдыша, Матем.сб., 1984, т.123(165), с.391-406.

Анализ математических моделей рабочих процессов в цилиндрах тепловозных дизелей

Е. Н. Климова

Самарский государственный университет путей сообщения, Россия
elenaklimova25@gmail.com

Решение плоской краевой стохастической задачи ползучести

Л. В. Коваленко

Самарский государственный технический университет, Россия
flytitmouse@mail.ru

В данной работе рассматривается стохастическая краевая задача ползучести при плоском напряженном состоянии при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Материал среды считается стохастически неоднородным, так что тензоры напряжений и деформаций являются случайными функциями координат x_1 и x_2 .

Постановка задачи выбрана в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения. Определяющие соотношения ползучести взяты в стохастической форме:

$$\dot{p}_{ij} = cS^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) (1 + \alpha U) \quad (i, j = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь функция U — случайная однородная функция двух переменных с известными статистическими характеристиками ($\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$), описывающая флуктуации реологических свойств материала; c , n и α — постоянные материала.

Постановка задачи дополняется уравнениями равновесия и условиями совместности деформаций:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

$$\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (3)$$

где Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

На контуре Γ области S , занимаемой телом, заданы детерминированные поверхностные силы q_i :

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Gamma} = q_i, \quad (4)$$

где n_j — компоненты единичного вектора нормали к контуру Γ .

Соотношения (1)–(3) при граничных условиях (4) задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно методом возмущений (методом малого параметра) относительно напряжений.

Для данной задачи найдено приближенное аналитическое решение, проведен его статистический анализ. Обнаружено, что вблизи контура Γ напряжения и деформации отличны от напряжений и деформаций, возникающих вдали от границы тела, и их значения могут превосходить их от 1,22 до 2,15 раз в зависимости от постоянных материала.

p -Адическая математическая физика: методы и приложения

С. В. Козырев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия

kozyrev@mi.ras.ru

Обсуждаются методы p -адической математической физики, включая теорию псевдодифференциальных операторов и теорию всплесков, и некоторые приложения к сложным иерархическим системам.

Обсуждаются следующие приложения p -адических интегральных уравнений:

1) Применение к описанию моделей межбассейновой кинетики динамики белка. Показывается, что p -адическое уравнение теплопроводности описывает конформационную динамику белка.

2) Обсуждается некоторое нелинейное (квадратичное) интегральное ультраметрическое уравнение. При помощи ультраметрической теории всплесков показывается, что это уравнение эквивалентно некоторой точно решаемой каскадной модели. Напомним, что каскадные модели (применяющиеся, в частности, в теории турбулентности) суть некоторые системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанные с деревьями. Строится в явном виде (при помощи некоторой рекуррентной процедуры) решение задачи Коши для исследуемого нелинейного уравнения с начальным условием в пространстве локально постоянных функций с компактным носителем и нулевым средним, показывается единственность такого решения.

Таким образом, показана связь ультраметрических интегральных уравнений, каскадных моделей и теории всплесков.

Продольно поперечный изгиб стержней переменной жесткости

Э. Г. Косых

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

ed-ksykh@rambler.ru

Рассмотрен стержень переменной жесткости EI , сжимаемый продольной силой и изгибаемый погонной поперечной нагрузкой $q(x)$, расположенный на упругом основании переменной жесткости (x) . Учтено также влияние продольной распределенной нагрузки $p(x)$. 1. Математическая сторона задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами относительно искомого поперечного перемещения V :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 V}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left\{ [P + p(x)] \frac{dV}{dx} \right\} + c(x) = q(x). \quad (1)$$

Общее решение подобного уравнения отсутствует. В настоящей работе предлагается методика сведения разрешающих систем подобных уравнений (1) к канонической матричной форме вида:

$$\frac{d^2}{dx^2} \bar{W} + [g(x)] \bar{W} = \bar{f}(x). \quad (2)$$

Здесь черта указывает на векторный характер переменных, а $g(x)$ - матрица-функция соответствующего размера.

2. При выполнении условий непрерывности и дифференцируемости функций-коэффициентов рассматриваемых уравнений сроятся решения системы уравнений (2) с помощью матриц-функций $Si(g, x)$, $Co(g, x)$, определенных, например, в случае $g(x) = g_0 + g_{01}x$. В этом случае

$$Co(g, x) = 1 - x^2 \left(\frac{1}{2!} g_0 + \frac{1}{3!} g_{01} x \right) + x^4 \left[\frac{1}{4!} g_0^2 + \left(\frac{g_0 g_{01}}{0! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1! \cdot 4 \cdot 5} + \frac{g_{01} g_0}{1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0! \cdot 4 \cdot 5} \right) x + \frac{g_{01}^2}{1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1! \cdot 5 \cdot 6} x^2 \right],$$

$$Si(g, x) = x - x^3 \left(\frac{1}{3!} g_0 + \frac{g_{01}}{1! \cdot 3 \cdot 4} x \right) + x^5 \left[\frac{1}{5!} g_0^2 + \left(\frac{g_0 g_{01}}{0! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1! \cdot 5 \cdot 6} + \frac{g_{01} g_0}{1! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0! \cdot 5 \cdot 6} \right) x + \frac{g_{01}^2}{1! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1! \cdot 6 \cdot 7} x^2 \right].$$

В докладе приводятся общие формулы для функций $Si(g, x)$ и $Co(g, x)$. Общие в том смысле, что матрица-функция коэффициентов системы (2) представляется разложением в ряд Тейлора

$$g(x) = g_0 + \sum g_{0i} \times x^i.$$

Показано, что в конкретных случаях представленные функции - это тригонометрические, гипер-болические, функции Бесселя и их комбинации. До численных результатов доведено несколько примеров аналитических решений задач поперечного, продольно-поперечного изгибов стержней переменной жесткости. В частности сформулировано в терминах метода начальных параметров решение задачи по-перечного изгиба стержня переменной жесткости. Обсуждается решение задачи изгиба для "ступенчатых" стержней - формально: решается система уравнений (2) с кусочно-непрерывными, дифференцируемыми функциями-коэффициентами. Приведены примеры решения задачи о критической силе Эйлера при статической потере устойчивости формы равновесия для сжатых упругих стоек переменной жесткости. И обсуждаются некоторые вопросы применимости предлагаемых решений в задачах продольно-поперечного изгиба пластин.

Исчисление распределенного порядка и уравнения ультрамедленной диффузии

А. Н. Кочубей

Институт математики НАН, Украина

kochubei@i.com.ua

Рассматриваются уравнения вида

$$\left(\mathbb{D}^{(\mu)} u \right) (t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbb{D}^{(\mu)}$ – производная распределенного порядка, т. е.

$$\mathbb{D}^{(\mu)} \varphi(t) = \int_0^1 (\mathbb{D}^{(\alpha)} \varphi)(t) \mu(\alpha) d\alpha,$$

$\mathbb{D}^{(\alpha)}$ – дробная производная Капуто-Джрбашяна порядка α , μ – положительная весовая функция.

Приведенное выше уравнение используется в физической литературе для моделирования диффузии с логарифмическим ростом среднего квадратичного смещения диффундирующих частиц. В работе развивается математическая теория таких уравнений, изучаются производные и интегралы распределенного порядка, выясняется их теоретико-операторный смысл.

Distributed Order Calculus and Equations of Ultraslow Diffusion

A. N. Kochubei

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine

kochubei@i.com.ua

We consider equations of the form

$$\left(\mathbb{D}^{(\mu)}u\right)(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

where $\mathbb{D}^{(\mu)}$ is a distributed order derivative, that is

$$\mathbb{D}^{(\mu)}\varphi(t) = \int_0^1 (\mathbb{D}^{(\alpha)}\varphi)(t)\mu(\alpha) d\alpha,$$

$\mathbb{D}^{(\alpha)}$ is the Caputo-Dzhrbashyan fractional derivative of order α , μ is a positive weight function.

The above equation is used in physical literature for modeling diffusion with a logarithmic growth of the mean square displacement. In this work we develop a mathematical theory of such equations, study the derivatives and integrals of distributed order, clarify their operator-theoretic meaning.

Вариационный метод в релятивистской задаче трех тел

А. Ф. Крутов

Самарский государственный университет, Россия

krutov@ssu.samara.ru

М. Ю. Кудинов

Самарский государственный университет, Россия

mkudinov7@rambler.ru

Н. А. Цирова

Самарский государственный университет, Россия

ntsirova@ssu.samara.ru

Актуальность проблемы построения релятивистского подхода к описанию трехчастичных кварковых систем, в частности, нуклонов определяется тем, что экспериментальные исследования по измерению, например, электромагнитных нуклонных формфакторов занимают важное место в программах современных ускорителей. В первую очередь это касается экспериментов по рассеянию электронов нуклонами в лаборатории JLab. Так, проведенные в последнее время измерения электрического и магнитного формфакторов протона выявили «нестандартное» или «не Розенблютовское» поведение этих величин. Этот эффект еще не получил своего теоретического объяснения. Данные экспериментальные исследования приводят к необходимости теоретического изучения формфакторов нуклонов в области больших передач импульса. Для описания электромагнитной структуры нуклона в настоящей работе выбран один из наиболее распространенных в настоящее время релятивистских методов описания, т.н. релятивистская гамильтонова динамика (РГД), основанная на реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых составной системы. В этом подходе необходимо уметь строить релятивистские волновые функции трехчастичных составных систем. Так как нуклоны представляют собой основное состояние трех кварков, то разумно ожидать, что вариационный метод вычисления будет одним из наиболее перспективных.

Волновые функции системы взаимодействующих частиц в РГД определяются как собственные функции полного коммутирующего набора операторов:

$$\hat{M}_I, \hat{J}^2, \hat{m}_J, \hat{P}, \quad (1)$$

где \hat{J}^2 - оператор квадрата полного момента количества движения, \hat{m}_J - проекция оператора \hat{J} на ось квантования, \hat{P} - оператор полного импульса

системы. В мгновенной форме динамики операторы \hat{J}^2 , \hat{m}_J , \hat{P} совпадают с соответствующими операторами системы невзаимодействующих частиц. Таким образом, от взаимодействия зависит только оператор \hat{M}_I - оператор массы составной системы: $\hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}$, здесь \hat{M}_0 - оператор инвариантной массы системы без взаимодействия, \hat{V} - оператор взаимодействия. Таким образом задача нахождения волновых функций сводится к диагонализации массового оператора:

$$\hat{M}_I |\psi(1, 2, 3)\rangle = \lambda |\psi(1, 2, 3)\rangle, \quad (2)$$

где λ - собственное значение оператора массы.

В развитом вариационном методе трехчастичные волновые функции представляются в виде:

$$|\psi(1, 2, 3)\rangle = \sum_{\mu} C_{\mu} |\psi_{\mu}\rangle, \quad (3)$$

где $|\psi_{\mu}\rangle$ - подходящий набор пробных функций. Коэффициенты C_{μ} вычисляются, исходя из вариационного принципа.

Волновые функции строятся в базисе с отделенным движением центра инерции:

$$|\vec{P}, J, m_J, k_1, k_2, L, S, (LSJ)_2\rangle, \quad (4)$$

где $P_{\mu} = (p_{1\mu} + p_{2\mu} + p_{3\mu})$, k_i - модуль соответствующего вектора Якоби, L, S, J - суммарный орбитальный момент, спин и полный момент количества движения, соответственно. $(LSJ)_2$ - набор орбитального момента, спина и полного момента количества движения двухчастичной подсистемы. В качестве потенциала двухчастичного взаимодействия использовался "размазанный" потенциал с кулоновским поведением на малых расстояниях, линейным запираением и спин-спиновым взаимодействием. Пробные волновые функции выбирались в гауссовском виде. В пакете символьных вычислений *Mathematica* 6.0 написана программа для получения волновых функций в аналитической форме.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 07-02-00962).

Пуанкаре-инвариантные квантовые механики

А. Ф. Крутов

Самарский государственный университет, Россия

krutov@ssu.samara.ru

В. Е. Троицкий

*Научно-исследовательский институт ядерной физики
им. Д. В. Скобельцына МГУ, Россия*

troitsky@theory.sinp.msu.ru

Дан обзор одного из основных современных подходов к релятивистскому описанию составных кварковых и нуклонных систем с фиксированным числом частиц – Пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПИКМ). Данный подход основан на реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы взаимодействующих частиц. Взаимодействие включается в генераторы алгебры (наблюдаемые) таким образом, чтобы сохранить коммутационные соотношения, определяющие алгебру.

Сначала рассматриваются квантовомеханические системы с группой инвариантности Галилея (точнее, центрального расширения этой группы). Показано, что включение взаимодействия в алгебру Галилея приводит к единственной динамике, определяемой уравнением Шредингера.

В релятивистском случае включение взаимодействия в алгебру Пуанкаре приводит к различным видам динамики, различающимся т.н. кинематическими подгруппами, т.е. наборами генераторов, независимых от взаимодействия. Сделан обзор основных динамик, используемых в современных расчетах: мгновенной формы динамики, динамики на световом фронте и точечной формы динамики.

Далее в докладе обсуждаются проблемы, возникающие при описании электрослабых свойств составных систем. Основной проблемой здесь является построение оператора электрослабого тока, удовлетворяющего условию лоренц-ковариантности, а в электромагнитном случае и условию сохранения. Показано, что построение такого оператора является проблемой в любой формулировке релятивистской составной модели, например, в квазипотенциальном подходе. Описывается один из возможных способов построения оператора электрослабого тока с правильными трансформационными свойствами. Способ построения опирается на аналог теоремы Вигнера-Экарта для группы Пуанкаре. В этом подходе приведенные матричные элементы – инвариантные формфакторы – интерпретируются как лоренц-инвариантные обобщенные функции. Показано, что развитый формализм

позволяет построить лоренц-ковариантный оператор сохраняющегося электромагнитного тока в импульсном приближении (т.н. модифицированное импульсное приближение (МИП)).

Работа метода продемонстрирована на примере описания электрослабых свойств составных кварковых систем – мезонов и составной ядерной системы – дейтрона. В частности, рассчитываются константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов, в том числе мезонов, содержащих один тяжелый кварк, полуплептонные распады мезонов, функция Изгура-Вайзе для мезонов с одним тяжелым и одним легким кварком, получены модельно независимые ограничения на наклон функции Изгура-Вайзе. Для дейтрона произведен расчет электромагнитных формфакторов, функций $A(Q^2)$ и $B(Q^2)$ ($Q^2 = -q^2$, q – переданный импульс) упругого электрон-дейтронного рассеяния, компоненты $T_{20}(Q^2)$ тензора поляризации дейтрона в упругом ed -рассеянии. Все расчеты дают хорошее согласие с экспериментами. В рамках развитого метода получено асимптотическое разложение для электромагнитных формфакторов дейтрона при больших переданных импульсах. Данное разложение используется для описания упругого ed -рассеяния в области экспериментов JLab.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 07-02-00962).

Формфакторы составных систем в области больших переданных импульсов

А. Ф. Крутов

Самарский государственный университет, Россия

`krutov@ssu.samara.ru`

В. Е. Троицкий

Научно-исследовательский институт ядерной физики

им. Д.В. Скобельцына, Россия

`troitsky@theory.sinp.msu.ru`

Н. А. Цирова

Самарский государственный университет, Россия

`ntsirova@ssu.samara.ru`

Работа посвящена проблеме описания составных систем в формализме релятивистской квантовой механики в случае больших переданных импульсов. Мы изучаем электромагнитную структуру простейших двухчастичных

систем: дейтрона как нуклон-нуклонной системы и пиона. Они могут быть изучены в широкой области переданных импульсов: от небольших до той области, где может быть применима пертурбативная КХД. Это очень важно, в особенности, для пиона, простейшей $q\bar{q}$ системы. Ожидается, что для описания пиона пКХД можно будет применять при более низких переданных импульсах по сравнению с другими составными системами.

Изучение электромагнитной структуры упомянутых составных систем является важной частью программы JLab "12 GeV Upgrade". Модернизация ускорителя на непрерывном электронном пучке позволит быстро набрать необходимую статистику и получить достоверные экспериментальные данные по упругому электрон-дейтронному и электрон-пионному рассеянию при больших переданных импульсах. И для дейтрона, и для пиона предсказывается проявление режима пКХД в будущих экспериментах. Предсказания этой теории справедливы для асимптотически больших переданных импульсов, так что область будущих экспериментов JLab может рассматриваться как асимптотическая для дейтрона и пиона.

В формализме мгновенной формы релятивистской квантовой механики формфакторы дейтрона представлены в виде двойных интегралов. Чтобы исследовать электромагнитную структуру дейтрона при больших переданных импульсах, необходимо найти асимптотическое разложение этих интегралов. Это весьма нетривиальная задача, т.к. анализ подынтегральной функции показывает, что рассматриваемые интегралы не сводятся к случаям, описанным в классической литературе по асимптотическим оценкам. Для нахождения асимптотического поведения дейтронных формфакторов используется доказанная авторами теорема об асимптотическом разложении n -мерных интегралов Лапласа с точкой максимума, лежащей на границе области интегрирования, и не являющейся точкой экстремума. Следует подчеркнуть, что данная теорема позволяет не только получить степень спада по переданному импульсу, но и вычислить предасимптотическую константу. Произведено сравнение полученной асимптотики с нерелятивистским расчетом, а также с полученным авторами фитом экспериментальных данных при наибольших достигнутых на данный момент переданных импульсах. Получено, что современный эксперимент вышел на асимптотику, предсказываемую нуклон-нуклонными моделями дейтрона; что релятивистские поправки уменьшают скорость спада по переданному импульсу. Произведена оценка вклада обменных мезонных токов в асимптотику дейтронных формфакторов. Из анализа асимптотических расчетов получены ограничения на плохо известные в настоящее время вершинные мезон-нуклонные формфакторы. Получена аналитическая форма нуклон-нуклонной волновой функции дейтрона, при которой асимптотика дейтронных формфакторов совпадает с асимптотикой кваркового счета и пКХД.

Электромагнитный формфактор пиона также описывается двойным интегралом. В работе произведен расчет пионного формфактора с различными волновыми функциями и различными параметрами составной кварковой модели. С помощью доказанной теоремы получено асимптотическое разложение формфактора пиона. Показана необходимость введения формфакторов кварков, получены ограничения на параметры составной кварковой модели при больших переданных импульсах. Показано, что асимптотику, предсказываемую пертурбативной КХД и кварковым счетом, можно достичь, если принять предположение о зависимости массы конститuentного кварка от переданного импульса.

Работа поддержана грантом РФФИ №07-02-00962.

A Random Matrix Model of Black Holes

D. Xu

University of Iowa, USA

`dxu@math.uiowa.edu`

A random matrix model of black holes is given based on analysis of Gaussian complex ensembles, based on the generalization of chRMT of QCD. Spacetime freedoms are incorporated in terms of eigenvalues of the ensemble. Classical observables of black holes can be computed using this model and it satisfies asymptotic freedom and holographic principle.

Алгоритм расчета интегралов специального вида

В. А. Куделькин

Консорциум «Интегра-С», Россия

zaovolga@integra-s.com

Ю. Л. Ратис

Самарский государственный аэрокосмический институт

им. С.П. Королева, Россия

ratiss@samtel.ru

В работе проведен сравнительный анализ вычислительной эффективности алгоритмов вычисления интегралов специального вида, необходимых для обработки сигналов, поступающих от оптикоэлектронных датчиков перемещений. В [1,2] было показано, что проблема нахождения функции отклика оптикоэлектронного датчика с учетом дифракционных поправок сводится к задаче вычисления интегралов специального вида $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$.

$$A_s(p, q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \sin(pt^2) \cos(qt), \quad (1)$$

$$A_c(p, q) \equiv \int_0^1 \frac{dt}{t} \cos(pt^2) \sin(qt). \quad (2)$$

Как показал последующий анализ, интегралы (1), (2) в общем случае не могут быть представлены в виде комбинации конечного числа элементарных и/или специальных функций. С формальной точки зрения численные значения интегралов специального вида $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$ могут быть найдены на основе общеизвестных квадратурных формул. Однако фактически вычисление этих интегралов по квадратурным формулам Симпсона, Гаусса и т.п. оправдано только при небольших значениях аргументов p и q . В тех случаях, когда выполняются условия $p \gg 1$ и/или $q \gg 1$, подынтегральные выражения в формулах (1), (2) становятся быстроосциллирующими, и использование квадратурных формул для вычисления величин $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$ становится некорректным.

В конечном счете, задача корректного расчета величин $A_s(p, q)$ и $A_c(p, q)$ численными методами сводится к необходимости избавиться от сложения большого числа знакопеременных слагаемых, имеющих одинаковый порядок величины. С точки зрения теории аналитических функций, общий подход к преодолению указанной проблемы основан на использовании идеи метода перевала [3].

В настоящей работе построены простые аналитические выражения для расчета интегралов специального вида. Проведен численный анализ полученных аналитических выражений. Показано, что использование идеологии метода перевала позволяет существенно повысить вычислительную эффективность алгоритмов, необходимых для обработки сигналов, поступающих с оптикоэлектронной датчиковой аппаратуры.

Список литературы

1. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И. Дифракция светового потока на чувствительных элементах электронно-оптических и оптикоэлектронных датчиков механических перемещений, Компьютерная оптика, 16, 1996, с.74-77
2. Ратис Ю.Л., Леонович Г.И., Курушина С.Е., Мельников А.Ю. Нелинейные дифракционные искажения оптической функции отклика в кодирующих сопряжениях оптикоэлектронных датчиков, Компьютерная оптика, т.18., Самара-Москва, 1998, с.61-71
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1987, 688 с.

Расширение области неустойчивых мод при формировании ДС в поле флуктуаций динамических переменных

С. Е. Курушина

Самарский государственный аэрокосмический университет

им. С.П.Королева, Россия

kurushina72@mail.ru

В настоящее время теория диссипативных структур (ДС) широко применяется в биологии, химии, в различных областях физики, так как неоднородные спонтанно возникающие структуры обнаружены во многих неравновесных диссипативных системах [1].

В этой работе исследуется влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование ДС при мягком режиме их возбуждения. В качестве конкретной модели используется модель морфогенеза Гирера - Майнхардта [2]. Эта модель не утратила своего значения и в настоящее время, так как форма учета дальнего действия членами диффузионного типа является достаточно общей.

Скорости изменения концентраций автокаталитической и демпфирующей переменных (активатора и ингибитора, соответственно) описываются системой уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t} &= \rho + k\frac{a^2}{h} - \mu a + D_a \Delta a + F_1(\vec{r}, t); \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= ca^2 - \nu h + D_h \Delta h + F_2(\vec{r}, t).\end{aligned}$$

Здесь ρ – скорость образования автокаталитической переменной, μ – ее постоянная распада, D_a – коэффициент диффузии активатора; ν – постоянная скорости распада демпфирующей переменной, член ca^2 задает скорость образования ингибитора, D_h – коэффициент диффузии ингибитора. Случайные функции $F_i(\vec{r}, t)$ определяют пространственные и временные гауссовы флуктуации скорости изменения концентраций активатора и ингибитора, соответственно, с корреляционными функциями $\langle F_i(\vec{r}, t) F_i(\vec{r}', \tau) \rangle = \theta_i f_i(|\vec{r} - \vec{r}'|) \delta(t - \tau)$ и нулевыми средними значениями. Взаимная корреляция случайных функций $F_i(\vec{r}, t)$ отсутствует. Величины θ_i характеризуют интенсивность флуктуаций, $f_i(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ – некоторая функция, определяющая пространственную зависимость корреляций однородного и изотропного случайного поля

Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод.

Аналитически исследовано влияние аддитивного однородного изотропного поля гауссовых флуктуаций динамических переменных на образование диссипативных структур при мягком режиме их возбуждения. Проведено численное моделирование эволюции этой системы при беспотоковых и кольцевых граничных условиях. Показано, что вблизи маргинального состояния флуктуации динамических переменных приводят к увеличению области неустойчивых мод, а в области контрастных структур вдали от бифуркации Тьюринга флуктуации способствуют более быстрому образованию последних. Показано, что действительная часть собственных чисел неустойчивых мод пропорциональна интенсивности флуктуаций и некоторой степенью радиуса корреляции, зависящей от размерности пространства реакционно – диффузионной системы.

1. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва-Ижевск: ИКИ НИЦ РХД, 2004.

2. Meinhardt H., Gierer A. Generation and regeneration of sequences of structures during morphogenesis. // J. Theor. Biol., 1980, v. 85, p. 429-450.

Кинетические переходы в одной нелинейной стохастической модели конкуренции

С. Е. Курушина, В. В. Максимов.

Самарский государственный аэрокосмический университет им.

С.П.Королева, Россия

kurushina72@mail.ru

Результаты влияния внешних шумов на системы различны: во-первых, шумы вызывают флуктуации в характеристиках линейных и нелинейных систем, во-вторых, в случайно неоднородных системах могут возникать корреляционные неустойчивости, наконец, шумы способны вызывать качественное изменение режимов поведения динамических и распределенных систем.

В предлагаемой работе анализируется набор стационарных состояний в системе, описывающей конкуренцию двух биологических видов, ориентированных на один ресурс. Система уравнений, описывающих конкуренцию двух видов экологических сообществ и учитывающих подвижность особей слабого вида и флуктуации плотности пищи в пространстве и во времени имеет вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= (BM - A)N \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= (bM - a)n + D\Delta n \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= Q - GM - CN - cn + f(\vec{r}, t) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где N , n – плотности численностей сильного и слабого вида, M – плотность пищи; A , a (B , b) – коэффициенты естественной убыли (прироста) видов; Q – скорость роста пищи; C , c – коэффициенты ее потребления; G – коэффициент естественного распада пищи. Слагаемое $D\Delta n$ учитывает подвижность особей слабого вида. Случайная сила $f(\vec{r}, t)$ задает пространственные и временные гауссовы флуктуации плотности пищи с корреляционной функцией: $\langle f(\vec{r}, t)f(\vec{r}', t') \rangle = 2G\theta \exp(-k_f |\vec{r} - \vec{r}'|) \delta(t - t')$.

С точностью до слагаемых третьего порядка малости по амплитудам неустойчивых мод включительно, получена система уравнений для параметров порядка. В результате численного моделирования показано, что система (1) допускает три различных типа стационарных решений: классическое решение, соответствующее исчезновению слабого вида; решение, соответствующие явлению критического перехода типа “заселения среды”, которое качественно согласуется с результатами работы [1]; и новый тип решений, соответствующий установлению стационарного состояния, при котором средняя по объему плотность численности слабого вида больше средней

по объему плотности численности сильного вида. Построены параметрические диаграммы на плоскостях (D, p_1) и (D, θ) , определяющие границы областей различных типов решений, где $p_1 = a/b - A/B$.

1. Михайлов А.С., Упоров И.В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией. //Успехи физических наук, 1984, т.144, в. I, с.79-112.

Влияние нелинейности процессов на фрактальную размерность перколяционного кластера

Х. Д. Ламажапов

Самарский государственный университет путей сообщения, Россия

hubita@mail.ru

Бифуркационные процессы в социально-экономических системах

Н. М. Латыпова

Самарский государственный университет путей сообщения, Россия

nailya99@yandex.ru

Материальные ресурсы - R планеты ограничены, а потребности человечества - Π возрастают. На определённом этапе, когда потребности человечества превысят ресурсные возможности $R < \Pi$, в социально-экономической системе (СЭС) возникает катастрофическая ситуация.

Чем больше потребностей в состоянии удовлетворить система, тем большее количество ресурсов она должна переработать и тем более сложной по своей структуре она должна быть[1]. Тем самым она становится менее устойчивой и более критичной к катастрофам. Развитие СЭС в первую очередь определяется распределением ресурсов на душу населения.

В данной работе устойчивый процесс развития СЭС характеризуется петлей гистерезиса (кривая ABC, рис.1).



Кривую ABC (рис.1) с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать уравнением вида

$$F = \alpha x^3 + x + b,$$

где α - нормировочный коэффициент; a - коэффициент, характеризующий угол наклона <петли гистерезиса> кривой ABC, т.е. отношение ресурсов данной страны на душу населения (в руб / чел. или в %); b - потребности на душу населения (%); x - население страны (%).

При $a = 0$ и $a > 0$ кривая ABC не имеет критических точек, система находится в квазиустойчивом состоянии (рис. 2)

Если $a < 0$ то кривая ABC (рис.2) является структурно- неустойчивой и имеет две критические точки (бифуркации) (система неустойчива):

$x_1 = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ и $x_2 = +\sqrt{-\frac{a}{3}}$ В этих точках происходит катастрофический срыв кривой ABC.

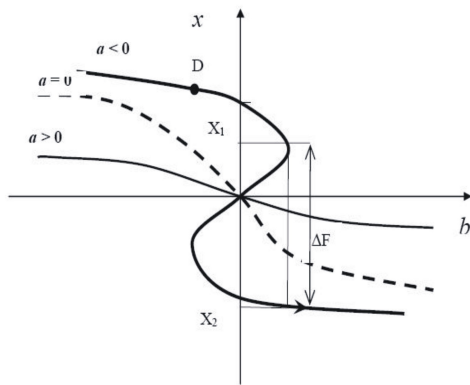


Рис.2. Распадение кривой ABC при возмущении её функцией ΔF

Наклон <петли гистерезиса> характеризует скорость процессов, происходящих в СЭС, которую можно найти как

$$a = \frac{dR}{dN}$$

Кривые **I** и **II** (рис. 1) означают справедливое и несправедливое распределение ресурсов, соответственно.

Анализ процесса развития СЭС показывает, что в системе заложены катастрофические скачки.

В процессе исторического развития человечество все больше увеличивало коэффициент a , за счет увеличения потребления ресурсов. Это привело к росту ΔF , что выразилось в том, что каждый новый переход от одной формации к другой увеличивал тяжесть катастрофы.

Таким образом, экономическая система является принципиально неустойчивой системой и в первую очередь ее устойчивость зависит от параметра a , который характеризует процент распределения ресурса на душу населения.

Литература

1. Чертыковцев, В.К. Устойчивость социально-экономических систем: статистические аспекты исследования [Текст]: монография / В.К. Чертыковцев, А.Н. Богусонов.- Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2006.- 140 с.

О полигармоническом разложении функции

В. Г. Лежнев

Кубанский государственный университет, Россия

lzhnv@mail.kubsu.ru

Рассматривается задача разложения функции $f(x) \in L_2(Q)$ на полигармонические слагаемые, Q -ограниченная область в R^2 с границей Ляпунова S .

Следующее утверждение будем называть леммой Новикова (Новиков П.С., 1938): справедливо разложение $L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q)$, где $G(Q)$ – подпространство гармонических в Q функций, а $h(x)$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\iint_Q h(y)E(x-y)dy = 0, \quad x \in Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q},$$

где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа.

1. Любая функция $f(x) \in L_2(Q)$ раскладывается в сумму $f(x) = g(x) + h(x)$ согласно разложению. Алгоритм вычисления гармонической составляющей $g(x)$ состоит в следующем.

Пусть последовательность точек $z^m \in Q^+$, $m = 1, 2, \dots$, ограничена, удовлетворяет условию единственности гармонических функций и отделена от границы S .

Лемма. Последовательность функций $\gamma_m(x) = E(z^m - x)$, $m = 1, 2, \dots$, полна в $G(Q)$ и линейно независима.

Обозначим $g^N(x)$ проекцию функции $g(x)$ на подпространство $\{\gamma_m(x)\}_{m=1}^N \subset G(Q)$, $g^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(x)$. Коэффициенты c_m определяются решением задачи минимизации функции $F(c_1, c_2, \dots, c_N) = \left\| f(x) - \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(x) \right\|^2$. Необходимое условие экстремума функции приводит к системе с невырожденной матрицей Грама.

2. Уравнение Пуассона $\Delta h(x) = q(x)$, $x \in Q$, имеет единственное решение в подпространстве $N(Q)$ для любой $f(x) \in L_2(Q)$. То есть можно определить оператор $\Delta^{-1} : L_2(Q) \rightarrow N(Q)$. Например, если $H(x)$ – решение краевой задачи: $\Delta H(x) = f(x)$, $x \in Q$, $H(x) = 0$, $x \in S$, то $h(x)$ можно представить в виде

$$h(x) = \Delta^{-1}f(x) = (I - P_G)H(x) = (I - P_G)(f * E),$$

где P_G – оператор проектирования на $G(Q)$, аппроксимация которого указана выше.

3. Обозначим $f_0(x) = f(x)$ и рассмотрим рекуррентную процедуру $a_k) - b_k)$ построения функции $g_k \in G(Q), h_k \in N(Q)$ и $f_k, k = 1, 2, \dots$:

$$a_k) f_{k-1} = g_k + h_k, \quad b_k) f_k = \Delta h_k,$$

то есть $f_{k-1} = g_k + \Delta^{-1} f_k = g_k + \Delta^{-1} g_{k+1} + \Delta^{-1} h_{k+1}$,

$$f_0 = g_1 + h_1 = g_1 + \Delta^{-1} g_2 + \Delta^{-2} f_2 = \sum_{k=1}^N \Delta^{-k} g_{k+1} + \Delta^{-N-1} f_{N+1},$$

последнее слагаемое исчезает при возрастании N , и $f(x)$ аппроксимируется суммой полигармонических функций.

4. Вычисление гармонической составляющей функции является основой несеточного метода точечных потенциалов для краевых задач уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в R^2 и R^3 . Полученное разложение может быть использовано в задаче сжатия цифровых изображений.

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ №06-01-96648, №07-01-00269

Решение задачи управления для системы волновых уравнений

С. В. Лексина

Самарский государственный университет, Россия

lesveta@rambler.ru

Рассмотрена система волновых уравнений

$$u_{tt} - Au_{xx} = 0, \tag{1}$$

в области $Q_{l,T} = [0, l] \times [0, T]$ где $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))^T$ - вектор-функция, A - постоянная квадратная матрица порядка n с равными собственными значениями $\lambda_i = \lambda^2, i = 1..n$.

Решение задачи граничного управления для системы (1) найдена, как решение краевых задач с заданными начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

и краевыми условиями второго рода

$$u_x(0, t) = \mu(t), u_x(l, t) = \nu(t), 0 \leq t \leq T < \frac{l}{\lambda}, \tag{3}$$

которые обеспечивают выполнение финальных условий

$$u(x, T) = \varphi_1(x), u_t(x, T) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\varphi(x), \varphi_1(x) \in C^2[0, l]$, $\psi, \psi_1 \in C^1[0, l]$ - заданные вектор-функции.

Задача управления в условиях второй краевой задачи.

Найти функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$, такие, чтобы для решения $u(x, t)$ второй краевой задачи с заданными начальными условиями (2) в момент времени $0 \leq T \leq \frac{l}{\lambda}$ выполнялись финальные условия (4).

Решение задачи управления в условиях второй краевой задачи найдено, как сумма решений задач о гашении колебаний и о переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние.

Задача о гашении колебаний. Найти функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$, такие, что для решения $u(x, t)$ второй краевой задачи с заданными начальными условиями (2) в момент времени $t = T$ выполнялись нулевые финальные условия

$$u(x, T) = 0, u_t(x, T) = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

Задача о переводе первоначально покоящейся системы в заданное состояние. Найти функции $\mu(t), \nu(t) \in C^2[0, T]$, такие, чтобы для решения $u(x, t)$ второй краевой задачи с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

в момент времени $t = T$ выполнялись финальные условия (4).

Результаты анонсированные в данной работе - это распространение результатов В.А. Ильина [1], Л.Н. Знаменской [2] полученных для волнового уравнения, на случай объектов, колебания которых описываются системой волновых уравнений.

Список литературы

- [1] Ильин, В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах / В.А. Ильин // Докл. РАН. - 1999.- Т.369.- №5. - С. 592-596.
- [2] Знаменская, Л.Н. Управление упругими колебаниями / Л.Н. Знаменская.- М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.- 176 с.

Собственные колебания круговых трехслойных пластин на винклеровском основании

Д. В. Леоненко

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

leoden@tut.by

Рассматриваются собственные осесимметричные поперечные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластины круглой формы, скрепленной с упругим основанием. **Постановка задачи** и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q = q(r, t)$. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого легкого (не работающего в тангенциальном направлении) заполнителя ($h_3 = 2c$) справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Через h_k и ρ_k обозначены толщина и плотность материала k -го слоя.

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая свободные поперечные колебания круглой трехслойной пластинки без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Лагранжа [1] с учетом сил инерции:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0,$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w - M_0 \ddot{w} = 0,$$

Здесь $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$ коэффициенты a_i выражаются через геометрические и прочностные характеристики материалов слоев; дифференциальные операторы L_2, L_3 .

Искомый прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

где $v(r)$ – координатная функция.

Функцию $v(r)$ определяем по формуле

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r) + C_7 Y_0(\lambda r) + C_8 K_0(\lambda r),$$

где J_0, Y_0 – функции Бесселя нулевого порядка (нижний индекс) первого и второго рода (функция Неймана), соответственно; I_0, K_0 – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевых порядков; C_5, \dots, C_8 – константы интегрирования.

Подставляя граничные условия (жесткое защемление и шарнирное опирание), получим выражения для определения серии собственных частот λ_n .

Численное исследование. Было проведено численное исследование зависимостей частот собственных колебаний системы «пластина-основание» от жесткости упругого основания и от толщин слоев при различных условиях закрепления кромок пластины.

Список литературы

1. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. Гомель: БелГУТ, 2003. 367 с.

Об одной задаче со свободной границей теории капиллярности

В. Н. Лесев

*Кабардино-Балкарский государственный университет
им. Х.М.Бербекова, Нальчик, Россия*

lvn_kbsu@mail.ru

Рассмотрим задачу о гравитационном растекании капли нелетучей жидкости по горизонтальной поверхности. В приближении теории смазки для осесимметричной капли в двумерном случае, имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{3\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial (P + F)}{\partial x} - U h \right] = 0. \quad (1)$$

где $y = h(x, t)$ – уравнение поверхности жидкости, t – время, μ – динамическая вязкость жидкости, g – ускорение свободного падения, $P(x, y)$ – давление, $F(x, y)$ – потенциальная энергия взаимодействия молекул произвольной точки жидкой пленки, рассчитанная на единицу объема, U – скорость скольжения.

Уравнение (1) при $F = U = 0$ исследовано в работах [1], [2]. Рассмотрим случай, когда только $F = 0$. Тогда, уравнение (1) в безразмерных переменных, для которых сохраним обозначения, примет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left[h^3 \frac{\partial h}{\partial x} - \beta \cdot \dot{x}_0(t) \cdot h \right], \quad (2)$$

где $\alpha, \beta = const$, $x = x_0(t)$ – радиус растекания капли.

Дополним уравнение (2) условием сохранения объема

$$\int_0^{x_0(t)} h(x, t) dx = S, \quad (3)$$

где $S = const$ – половина площади сечения капли в апексе.

Задача (2), (3) допускает точное автомодельное решение в виде $h = h(\xi)$, где $\xi = x - x_0(t)$, а скорость: $\dot{x}_0(t) = v$.

При этом, будем иметь:

$$h(\xi) = \left[\frac{3(\alpha\beta - 1)}{\alpha} \right] \cdot v^{1/3} \cdot \xi^{1/3}, \quad x_0^5(t) = \frac{320 \cdot \alpha}{81 \cdot (1 - \alpha \cdot \beta)} t. \quad (4)$$

Безразмерный профиль капли, рассчитанный на основе (4) для различных моментов времени t представлен на рис.1.

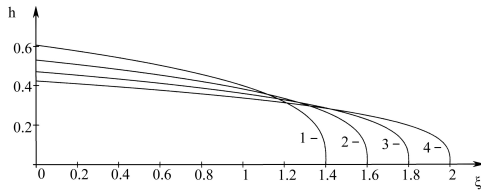


Рис. 3: Профиль капли для различных моментов времени: 1- $x_0(t) = 1.4$, 2- $x_0(t) = 1.6$, 3- $x_0(t) = 1.8$, 4- $x_0(t) = 2$

Вычислительные эксперименты, результаты одного из которых представлены выше, производились в пакете Mathcad. Отметим также, что, располагая аналитическими решениями, описывающими форму профиля капли на основе динамических методов [3] можно определить не только поверхностное натяжение, но и динамическую вязкость.

Список литературы

- [1] Быховский А.И. Растекание. Киев: Наук. думка, 1983. 191 с.
- [2] Калинин В.В., Старов В.М. О квазистационарном подходе к решению задач растекания жидкости//Коллоид. журн, 1992. - Т.54, №2. - С. 90 - 96.
- [3] Paradis P.-F., Ishikava T. and Yoda S. Non-Contact Measurements of the Thermophysical Properties of Hafnium-3 Mass% Zirconium at High Temperature//Jnt. J. of Thermophysics, 2003. -V.24, №1. - P. 239-258.

Косы в терминах N -солитонных $3D$ струн

В. С. Лоозе, С. В. Талалов

Тольяттинский государственный университет, Россия
svtalalov@tltsu.ru

В докладе рассматривается представление крашенных кос мировыми линиями точек возврата бесконечной струны в пространстве $E_{1,2}$. Сделанные выводы в существенном основаны на результатах, полученных ранее одним из авторов [1, 2]. В указанных работах речь шла об описании релятивистских $4D$ и $3D$ струн в терминах квадратичных форм мирового листа. Обобщение известного геометрического подхода [3] заключалось в том, что вторая квадратичная форма \mathbf{II} для мирового листа $3D$ струны

$$\mathbf{II} = \rho_+ d\xi_+^2 - \rho_- d\xi_-^2,$$



Рис. 4: Мировые линии точек возврата "трехсолитонной" струны.

где $\xi_{\pm} = \xi^1 \pm \xi^0$, допускала обращение коэффициентов $\rho_{\pm}(\xi_{\pm})$ в ноль, как в точках, так и на интервалах. Функции ρ_{\pm} входили в число динамических переменных теории. Именно данное расширение множества \mathcal{X} допустимых мировых листов позволило факторизовать \mathcal{X} по некоторой группе – так, что соответствующее фактор - множество описывается парой спектральных задач первого порядка

$$T'_{\pm}(\xi; \lambda) + Q_{\pm}(\xi)T_{\pm}(\xi; \lambda) = i\lambda\sigma_3 T_{\pm}(\xi; \lambda). \quad (1)$$

Здесь $Q_{\pm} = -\rho_{\pm}\sigma_{\pm} + \rho_{\pm}\sigma_{\mp}$, а вещественные функции ρ_{\pm} – коэффициенты второй квадратичной формы – из пространства Шварца. Радиус - вектор мирового листа (определенного представителя класса смежности) восстанавливается явно по по элементам матриц-решений $T_{\pm}(\xi; 0) \in SO(2)$. Давно известно, что струна в трехмерном пространстве - времени может иметь особенности типа точек возврата, которые не разрушаются в динамике. Один из результатов работы [1] состоит в том, что такие особенности соответствуют точкам дискретного спектра данных рассеяния линейных систем (1). Мировые линии точек возврата образуют косы. Пусть N_{\pm} - числа собственных значений систем (1). На рис.4 приведен пример, соответствующий некоторому частному выбору констант дискретного спектра при $N_{+} = 2$ и $N_{-} = 1$. При различном соотношении между константами дискретного спектра возникающие косы, вообще говоря, топологически неэквивалентны.

Список литературы

- [1] С. В. Талалов // ТМФ. 2007. Т. 152. No 3. с. 430.
- [2] С. В. Талалов // ТМФ. Т. 123. No 1. С. 38. 2000; Journ. of Phys. A. V. 22. P. 2275. 1989.
- [3] Б. М. Барбашов , В. В. Нестеренко. Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат. 1987.

Структура непрерывных функций в оболочке хаосов Радемахера

К. В. Лыков, Т. А. Морозова, Р. С. Суханов

Самарский государственный университет, Россия

alkv@list.ru

В работе изучаются непрерывные функции, представимые рядами Радемахера и хаосами.

Определение. Для целого неотрицательного n функция Радемахера $r_n = r_n(t)$ задается равенством

$$r_n(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), i \text{ нечетное целое число;} \\ -1, & \text{если } t \in \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), i \text{ четное целое число.} \end{cases}$$

В работе исследуются вопросы, связанные с существованием и полным описанием непрерывных функций на $[0, 1]$, которые можно получить как сумму ряда, состоящего из функций Радемахера или их произведений (хаосов):

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \text{ или}$$

$$f(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} c_{ij} r_i(t) r_j(t) \text{ почти всюду на } [0, 1].$$

В частности, получены следующие теоремы.

Теорема 1. Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1} r_i(t) = \frac{1}{2} - t \text{ почти всюду.}$$

Обратно, если $f(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$, и

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r_i(t) \text{ почти всюду,}$$

то

$$f(t) = c \left(\frac{1}{2} - t \right) \text{ и } c_i = 2^{-i-1} c.$$

Теорема 2. Пусть

$$f(t) = \sum_{1 \leq i < j < \infty} c_{ij} r_i(t) r_j(t) \text{ почти всюду на } [0, 1], \quad (*)$$

функция $f(t)$ непрерывна, и

$$\sum_{1 \leq i < j < \infty} |c_{ij}| < \infty. \quad (**)$$

Тогда

- 1) $\sum_{i=1}^{\infty} |c_{ii+1}| < \infty$;
- 2) $c_{ij} = 2^{-j+i+1} c_{ii+1}$, $j > i$.

Обратно, если выполнены условия 1) и 2), то имеет место равенство (*) для непрерывной функции f и выполняется (**). Кроме того, для этой функции справедливо следующее представление:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ii+1} f_i(t), \text{ где } f_i(t) = f_0(2^i t), \text{ } f_0(t) = \frac{4}{\pi} \arcsin(\cos \pi t).$$

В качестве примеров можно получить следующие разложения.

Пример 1.

$$\frac{1}{6} - t + t^2 = \sum_{1 \leq i < j < \infty} 2^{-i-j-1} r_i(t) r_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} \cdot \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos(2^i \pi t)).$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Пример 2.

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 4^{-i} \cdot \frac{1}{\pi} \arcsin(\cos(4^i \pi t)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2i+1}^{\infty} 2^{-j-1} r_{2i}(t) r_j(t)$$

— непрерывная на \mathbb{R} функция, которая нигде не имеет производной.

Близкие задачи (для сумм Радемахера) рассмотрены в статье Стечкина и Ульянова [1].

Литература.

[1] Стечкин С.Б., Ульянов П.Л. *О множествах единственности*, // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. С. 211-222.

Использование положительной определенности одного дифференциального оператора высшего порядка

Р. М. Мавлявиев

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,
Россия

mavly@mail.ru

Рассматривается оператор представленный в виде скалярной функции и функции полученной из исходного в результате воздействия одного дифференциального оператора высшего порядка. Указанное скалярное произведение является положительно определенным оператором. Последнее обстоятельство позволило доказать единственность решения основной задачи. В работе приведено данное доказательство.

О корректной разрешимости одной нелокальной задачи

И. Г. Мамедов

Институт Кибернетики НАНА, Азербайджан

ilgar-mammadov@rambler.ru

Постановка задачи. Пусть $G = G_1 \times G_2$, $G_i = (x_i^0, h_i)$; $x = (x_1, x_2)$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$; $W_p^{(3,1)}(G)$ -пространство всех $u(x) \in L_p(G)$, имеющих в смысле С.Л.Соболева обобщенные производные $D_1^{i_1} D_2^{i_2} u(x) \in L_p(G)$, $0 \leq i_1 \leq 3$, $0 \leq i_2 \leq 1$; $D_k = \partial/\partial x_k$, $k = \overline{1, 2}$. Норму в пространстве $W_p^{(3,1)}(G)$ будем определять равенством:

$$\|u\|_{W_p^{(3,1)}(G)} = \sum_{i_1=0}^3 \sum_{i_2=0}^1 \|D_1^{i_1} D_2^{i_2} u\|_{L_p(G)}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (V_{3,1}u)(x) &\equiv D_1^3 D_2 u(x) + a_{2,1}(x) D_1^2 D_2 u(x) + a_{3,0}(x) D_1^3 u(x) + \\ &+ a_{2,0}(x) D_1^2 u(x) + \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 a_{i_1, i_2}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} u(x) = \varphi_{3,1}(x), \end{aligned} \quad (1)$$

при нелокальных краевых условиях общего вида

$$\begin{cases} V_{i_1,0} u \equiv (D_1^{i_1} u)(x^0) + \widehat{V}_{i_1,0} u = \varphi_{i_1,0}; \\ (V_{3,0} u)(x_1) \equiv (D_1^3 u)(x_1, x_2^0) + (\widehat{V}_{3,0} u)(x_1) = \varphi_{3,0}(x_1); \\ (V_{i_1,1} u)(x_2) \equiv (D_1^{i_1} D_2 u)(x_1^0, x_2) + \\ + (\widehat{V}_{i_1,1} u)(x_2) = \varphi_{i_1,1}(x_2), \quad i_1 = \overline{0, 2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\widehat{V}_{i_1,0}$, $\widehat{V}_{3,0}$ и $\widehat{V}_{i_1,1}$ -линейные ограниченные операторы действующие из $W_p^{(3,1)}(G)$ в $R, L_p(G_1)$ и $L_p(G_2)$, соответственно.

Пусть выполнены условия: $a_{i_1,0}(x) \in L_p(G)$, $a_{i_1,1}(x) \in L_{p,\infty}^{x_1,x_2}(G)$, $i_1 = \overline{0, 2}$; $a_{3,0}(x) \in L_{\infty,p}^{x_1,x_2}(G)$. При этих условиях оператор $V = (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}, V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,1})$ задачи (1), (2) действует из $W_p^{(3,1)}(G)$ в $E_p^{(3,1)} \equiv R \times R \times R \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G)$ и ограничен.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Тогда любой $f \in (E_p^{(3,1)})^*$ имеет вид $f = (f_{0,0}, f_{1,0}, f_{2,0}, f_{3,0}, f_{0,1}, f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}) \in E_q^{(3,1)}$, где $q + p = qp$. Используя общий вид линейных ограниченных функционалов на $W_p^{(3,1)}(G)$ можно показать, что в этом случае оператор

$$\begin{aligned} \widehat{V}_0 &= (\widehat{V}_{0,0}, \widehat{V}_{1,0}, \widehat{V}_{2,0}, \widehat{V}_{3,0}, \widehat{V}_{0,1}, \widehat{V}_{1,1}, \widehat{V}_{2,1}) : W_p^{(3,1)}(G) \rightarrow \widehat{E}_p^{(3,1)} \equiv \\ &\equiv R \times R \times R \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \end{aligned}$$

имеет сопряженный

$$\widehat{V}_0^* = (\widehat{\omega}_{0,0}, \widehat{\omega}_{1,0}, \widehat{\omega}_{2,0}, \widehat{\omega}_{3,0}, \widehat{\omega}_{0,1}, \widehat{\omega}_{1,1}, \widehat{\omega}_{2,1}, \widehat{\omega}_{3,1}) : \widehat{E}_q^{(3,1)} \rightarrow E_q^{(3,1)}.$$

Это в частности, означает что справедливо тождество

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\widehat{V}_0 u) &= \sum_{i_1=0}^2 f_{i_1,0}(\widehat{V}_{i_1,0} u) + \int_{G_1} f_{3,0}(x_1) (\widehat{V}_{3,0} u)(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{i_1=0}^2 \int_{G_2} f_{i_1,1}(x_2) (\widehat{V}_{i_1,1} u)(x_2) dx_2 = \sum_{i_1=0}^2 (\widehat{\omega}_{i_1,0} \widehat{f})(D_1^{i_1} u)(x^0) + \\ &+ \int_{G_1} (\widehat{\omega}_{3,0} \widehat{f})(x_1) (D_1^3 u)(x_1, x_2^0) dx_1 + \\ &+ \iint_G (\widehat{\omega}_{3,1} \widehat{f})(x) (D_1^3 D_2 u)(x) dx + \\ &+ \sum_{i_1=0}^2 \int_{G_2} (\widehat{\omega}_{i_1,1} \widehat{f})(x_2) (D_1^{i_1} D_2 u)(x_1^0, x_2) dx_2 = (\widehat{V}_0^* \widehat{f}) u, \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $u \in W_p^{(3,1)}(G)$, $\hat{f} = (f_{0,0}, f_{1,0}, f_{2,0}, f_{3,0}, f_{0,1}, f_{1,1}, f_{2,1}) \in \hat{E}_q^{(3,1)}$.

Если в случае $p = \infty$ оператор \hat{V}_0 имеет сопряженный \hat{V}_0^* действующий $\hat{E}_1^{(3,1)}$ в $E_1^{(3,1)}$, то можно считать, что тождество (3) верно для всех $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема. Пусть оператор \hat{V}_0 по норме достаточно мал, а в случае $p = \infty$ имеет сопряженный действующий $\hat{E}_1^{(3,1)}$ в $E_1^{(3,1)}$. Тогда справедливы априорные оценки $\|u\|_{W_p^{(3,1)}(G)} \leq M\|Vu\|_{E_p^{(3,1)}}$, $M = \text{const}$; $\|f\|_{E_q^{(3,1)}} \leq M^*\|V^*f\|_{E_q^{(3,1)}}$, $M^* = \text{const}$.

Метод точечных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения

А. Н. Марковский

Кубанский государственный университет, Россия

markovskiywork@mail.ru

В ограниченной области $Q \subset R^3$ с достаточно гладкой границей $S = \partial Q$, рассматривается краевая задача

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in Q, \quad (1)$$

$$u(x)|_S = b_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right|_S = b_2(x). \quad (2)$$

1. Пусть $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа. Справедливо равенство

$$\alpha u(x) = p(x) + \int_S \left[b_1(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n_y} - b_2(y) E(x-y) \right] dS_y, \quad (3)$$

где $\alpha = 1$ при $x \in Q$, $\alpha = 0$ при $x \in Q^+ = R^3 \setminus \bar{Q}$ и

$$p(x) = \iint_Q \Delta u(y) E(x-y) dy$$

Для вычисления $u(x)$ достаточно определить $\Delta u(x) = v(x)$ и воспользоваться равенством (3).

Справедливо утверждение: $L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q)$, где $G(Q)$ –подпространство гармонических в Q функций, $N(Q)$ –подпространство нуль потенциалов. Тогда

$$v(x) = g(x) + h(x) \quad (4)$$

где $g(x) \in G(Q)$, $h(x) \in N(Q)$ и задача (1)–(2) сводится к определению функций $g(x)$ и $h(x)$.

Пусть последовательность точек $x^m \in Q^+$, $m = 1, 2, \dots$, отделена от границы S и удовлетворяет условию единственности гармонических функций в R^3 . Обозначим

$$\gamma_m(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x^m - y|}, \quad y \in Q,$$

Справедливо следующее утверждение: система функций $\gamma_m(y)$, $m = 1, 2, \dots$, полна в $G(Q)$ и линейно независима.

2. Из уравнения (1) и равенства (4) следует, что $g(x)$ удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению $\Delta^2 g(x) = 0$, $x \in Q$. Функция $p(x)$, при $x \in Q^+$, известна, и краевая задача для однородного бигармонического уравнения с граничными условиями (2) сводится к определению плотности $g(y) \in G(Q)$ объемного потенциала $p(x)$. Аппроксимация $g^N(y)$ функции $g(y)$ может быть представлена в виде

$$g^N(y) = \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(y), \quad y \in Q,$$

где коэффициенты c_m определяются из соответствующей вариационной задачи.

3. Из уравнения (1) и равенства (4) следует, что $h(x)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta h(x) = f(x)$, $x \in Q$. Нетрудно доказать, что решение в $N(Q)$ существует и единственно для любой функции $f(x) \in L_2(Q)$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу для уравнения Пуассона $\Delta w(x) = f(x)$, $x \in Q$, $w(x) = 0$, $x \in S$. Решение $w(x)$ может быть представлено в виде $w(x) = g_1(x) + h(x)$, где $g_1(x) \in G(Q)$ и $h(x) \in N(Q)$. Очевидно, что искомая функция $h(x)$ есть разность решения $w(x)$ и проекции этого решения на подпространство $G(Q)$ так, что $w(x) - g_1(x) = h(x) \in N(Q)$. Аппроксимацию гармонической составляющей $g_1(x)$ можно определить в виде линейной комбинации системы функций $\gamma_m(x)$ с неизвестными коэффициентами, которые определяются из соответствующей вариационной задачи.

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ №07-01-00269, №06-01-96648

Модельные уравнения Дирака-Максвелла с псевдоунитарной симметрией

Н. Г. Марчук

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия

`nmarчук2005@yandex.ru`

Предложена модельная система уравнений Дирака-Максвелла. Она имеет ряд отличий от стандартной системы уравнений Дирака-Максвелла. В частности, она является тензорной и обладает симметрией по отношению к псевдоунитарной группе.

Subwavelength Diffractive Photonic Crystal Lens

И. В. Минин

Новосибирский государственный технический университет, Россия

`igor.minin@ngs.ru`

One of the complex electromagnetic systems of interest to us is a photonic crystal, a periodic dielectric structure with lattice spacing of the order of the wavelength of the electromagnetic wave. Typical for a photonic crystal is that electromagnetic waves in a certain frequency range and/or with a certain polarization cannot propagate along certain directions in the crystal. This forbidden frequency range is called a stopgap. If the propagation of the electromagnetic wave is forbidden for any crystalline direction and any polarization, for a certain frequency range, then this forbidden frequency range is called a photonic band gap. In the report we have shown the possibility of subwavelength focus diffractive photonic crystal lens in millimeter/THz band.

Спектральные свойства дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией.

С. И. Митрохин

Московский государственный университет, Россия

mitrokhin@srcc.msu.ru

Рассмотрим краевую задачу Штурма–Лиувилля для дифференциального оператора вида

$$-y''(x) + q(x) \cdot y(x) = \lambda \cdot \rho^2(x) \cdot y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \rho(x) > 0, \quad (1)$$

с граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$. (2)

Будем предполагать, что потенциал $q(x)$ — суммируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция:

$$q(x) \in \mathcal{L}_1[0, \pi] \Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t) dt \right)'_x = q(x) \text{ почти всюду } \forall x \in [0, \pi], \quad (3)$$

а весовая функция $\rho(x) \in C^2[0, \pi] \Leftrightarrow \exists \rho''(x) \in C[0, \pi]$. (4)

Случай кусочно-гладкого потенциала $q(x)$ и разрывной весовой функции $\rho(x)$ рассмотрен автором в работе [1]. Случай суммируемого потенциала $q(x)$ при условии $\rho(x) \equiv 1$ рассмотрен в работе [2].

Пусть $\lambda = s^2$, $s = \sqrt{\lambda}$ — некоторая фиксированная ветвь корня. Сначала изучим вспомогательное дифференциальное уравнение вида

$$-y''(x) = \lambda \cdot \rho^2(x) \cdot y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \rho(x) > 0. \quad (5)$$

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид*

$$y(x, s) = C_1 y_3(x, s) + C_2 y_4(x, s); \quad y'(x, s) = C_1 y'_3(x, s) + C_2 y'_4(x, s), \quad (6)$$

причём имеют место следующие асимптотики при $|s| \rightarrow +\infty$:

$$y_k(x, s) = \rho^{-1/2}(x) \cdot e^{w_k s \cdot M(x)} \cdot \left[1 + \frac{A_{1k}(x)}{s} + \frac{A_{2k}(x)}{s^2} + \dots \right], \quad (7)$$

$$y'_k(x, s) = (w_k s) \cdot \rho^{1/2}(x) \cdot e^{w_k s \cdot M(x)} \cdot \left[1 + \frac{A_{1k}^1(x)}{s} + \frac{A_{2k}^1(x)}{s^2} + \dots \right], \quad (8)$$

$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt$, $w_3 = i$, $w_4 = -i$, $k = 3, 4$;

$$A_{1k}(x) = -\frac{1}{2aw_k} \cdot \int_0^x \varphi(t) dt, \quad A_{1k}^1(x) = A_{1k}(x) - \frac{\rho'(x)}{2aw_k \cdot \rho^2(x)}, \quad (9)$$

$$\varphi(x) = \frac{3}{4}\rho^{-3}(x) \cdot (\rho'(x))^2 - \frac{1}{2}\rho^{-2}(x) \cdot \rho''(x),$$

$$A_{2k}(x) = \left(-\frac{1}{4a^2}\right) \cdot \left[\frac{\varphi(x)}{\rho(x)} - \frac{\varphi(0)}{\rho(0)} + \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^x \varphi(t)dt\right)^2\right], \quad (10)$$

$$A_{2k}^1(x) = A_{21}(x) - \frac{\rho'(x) \cdot A_{11}(x)}{2aw_k \cdot \rho^2(x)} + \frac{A_{1k^1}(x)}{aw_k \cdot \rho(x)}, \dots \quad (11)$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$y''(x) + \lambda \cdot \rho^2(x) \cdot y(x) = q(x) \cdot y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (12)$$

и решим уравнение (12) методом вариации постоянных.

Теорема 2. *Общее решение уравнения (1) имеет вид*

$$y(x, s) = C_1 y_1(x, s) + C_2 y_2(x, s); \\ y'(x, s) = C_1 y_1'(x, s) + C_2 y_2'(x, s); \quad y_2(x, s) = y_1(x, -s); \quad (13)$$

$$y_1(x, s) = y_3(x, s) - \frac{1}{\Delta_0(s)} \cdot y_3(x, s) \cdot \int_0^x q(t) \cdot y_4(t, s) dt + \\ + \frac{1}{\Delta_0(s)} \cdot y_4(x, s) \cdot \int_0^x q(t) \cdot y_3^2(t, s) + \frac{1}{\Delta_0^2(s)} \cdot \Phi(x, s) + O(1/s^3), \quad (14)$$

$$\Phi(x, s) = y_3(x, s) \cdot \int_0^x q(t) \cdot y_4(t, s) \cdot y_3(t, s) \cdot \\ \cdot \left(\int_0^t q(\xi) \cdot y_4(\xi, s) \cdot y_3(\xi, s) d\xi \right) dt + \dots, \quad (15)$$

$$\Delta_0(s) = \Delta_0(x, s) = y_3(x, s) \cdot y_4'(x, s) - y_3'(x, s) \cdot y_4(x, s). \quad (16)$$

Подставляя формулы (5)–(16) в граничные условия (2), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Асимптотика собственных значений краевой задачи (1)–(4) имеет вид*

$$s_k = \frac{\pi k}{M(\pi)} + \frac{d_{1k}}{k} + \frac{d_{2k}}{k^2} + O(1/k^3), \quad d_{1k} = -\frac{M_0}{2\pi} + \frac{M_1 - M_2}{2\pi}, \\ M_0 = \int_0^\pi \varphi(t) dt, \quad M_1 = \int_0^\pi \frac{q(t)}{\rho(t)} dt, \quad M_2 = \int_0^\pi \frac{q(t) \cos(2m(t))}{\rho(t)} dt, \\ m(t) = \frac{\pi k}{M(\pi)} \cdot M(t), \quad M(t) = \int_0^t \rho(\xi) d\xi.$$

Вычислен также коэффициент d_{2k} .

Список литературы

- [1] Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной положительной весовой функцией // ДАН РАН. — 1997. — Т. 356. — № 1. — С. 13–15.
- [2] Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН, серия математическая. — 2000. — Т. 64. — N 4. — С. 47–108.

Достаточное условие существования предельных значений на границе области у метагармонических функций.

В. П. Михайлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

akg@mi.ras.ru

В полосе $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n, 0 < y < 1\}$ пространства \mathbb{R}^{n+1} рассматривается эллиптическое уравнение

$$\left(\Delta^m + P \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) u(x, y) = 0, (x, y) \in \Pi, \quad (1)$$

в котором $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, целое $m \geq 1$, а $P(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta)$ — произвольный многочлен с постоянными коэффициентами, порядка, меньшего, чем $2m$ (И.Н.Векуа, [1], назвал решения такого уравнения метагармоническими функциями). Рассматриваются решения уравнения (1), принадлежащие при любом $a \in (0, 1/2)$ пространству $W_2^{2m}(x \in \mathbb{R}^n, a < y < 1 - a)$.

В работе [2] доказано, что для существования у таких решений L_2 -пределов на границе необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: а) $\sup_{0 < y < 1} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty$ и б) $\sup_{0 < y < 1} \|\mathbb{P}_N u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где \mathbb{P}_N — проекционный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$, переводящий функцию $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ в функцию $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| < N} e^{i(x, \xi)} \tilde{f}(\xi) d\xi$, $\tilde{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

В докладе установлено, что достаточным условием существования L_2 -пределов решения на границе является условие

$$\int_{\Pi} y(1-y)|\nabla u(x,y)|^2 dx dy < \infty. \quad (2)$$

Из результатов работы [3] вытекает, что в случае $m = 1$ условие (2) не только достаточно, но и необходимо для существования L_2 -пределов решений на границе. Примеры показывают, что при $m > 1$ у любого уравнения (1) существуют решения, для которых условие (2) не является необходимым для существования L_2 -пределов на границе.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-01-00144а и НШ-3224.2008.1

Цитированная литература.

1. И.Н.Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. ГИТТЛ, М. Л., 1948г.

2. В.П.Михайлов. О существовании граничных значений у метагармонических функций. Матем. сб., т. 190, № 10, 1999г.

3. В.П.Михайлов. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей. Матем. сб., т. 101, № 2, 1976г.

Эффекты смешивания в распадах нуклонного резонанса $N^*(1535)$ и θ^+ проблема

Л. С. Молчатский

Самарский государственный педагогический университет, Россия

e-mail:levmol@yandex.ru

На сегодняшний день статус барионного состояния θ^+ с положительной странностью, существование которого было предсказано Дьяконовым, Петровым и Поляковым [1], остается неопределенным: некоторые группы, например [2, 3], наблюдают узкий барионный резонанс со странностью $S = +1$ и массой $m = 1.54 \pm 0.01 \text{ GeV}$, в то время как другие группы [4, 5] не находят никакого сигнала от θ^+ . Кроме того, представляется интересным тот факт, что фазовый анализ процессов $K N$ -рассеяния [6] накладывает жесткие ограничения на частичную ширину резонанса: $\Gamma < 1 \text{ MeV}$. Такая узкая ширина θ^+ -резонанса не согласуется с ее теоретическими оценками в рамках киральной солитонной модели [7], хотя именно в рамках этого подхода существование θ^+ было предсказано [1].

Принимая это во внимание, в данной работе рассматривается возможность интерпретации резонанса в системах pK^0 и nK^+ вне стандартного подхода [7], основанного на гипотезе о существовании экзотического барионного резонанса θ^+ , имеющего пентакварковую структуру $\theta^+ = uudd\tilde{s}$.

Мы исходим из предположения, что состояния pK^0 и nK^+ являются маловероятными (но экспериментально наблюдаемыми) модами распада хорошо известного нуклонного резонанса [8] $N^*(1535)$ со спин-четностью $j^P = \frac{1}{2}^-$ и массой $m = 1.54 \text{ GeV}$. В рассматриваемой модели pK^0 состояние возникает как результат переходов

$$N^{*+} \rightarrow p\eta \rightarrow pK^0. \quad (1)$$

Это главный процесс. Что касается состояния nK^+ , то оно способно возникнуть, например, посредством реакции $K^0 p \rightarrow K^+ n$, если реакция (1) имеет место.

Согласно модели (1) относительная доля распадов на протон и K^0 -мезон определяется соотношением

$$\Gamma(N^{*+} \rightarrow pK^0)/\Gamma_t = (\Gamma(N^{*+} \rightarrow p\eta)/\Gamma_t) \langle P(\eta \rightarrow K^0) \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\langle P(\eta \rightarrow K^0) \rangle$ есть вероятность перехода $\eta \rightarrow K^0$, усредненная по периоду осцилляций. Все величины в формуле (2), исключая вероятность $\langle P(\eta \rightarrow K^0) \rangle$, известны; поэтому решение задачи сводится к вычислению этой величины.

В рамках теории эффективного нелептонного лагранжиана [9] исследован процесс $\eta \rightleftharpoons K^0$ осцилляции и показано, что этот процесс существенно усилен по следующим причинам. Во-первых, энергетические уровни смешивающихся состояний η и K^0 находятся на близком расстоянии друг от друга. Во-вторых, недиагональный матричный элемент лагранжиана аномально усилен за счет вкладов, происходящих от виртуальных кварковых взаимодействий типа "пингвин". Вычисления приводят к следующему результату:

$$\Gamma(N^{*+} \rightarrow pK^0)/\Gamma_t \approx 5 \times 10^{-11}.$$

Рассмотренная мода распада резонанса $N^*(1535)$ оказалась исключительно маловероятной. Однако, реализация экспериментального наблюдения этих распадов представляется возможной в низкоэнергетических переходах вида $\gamma^0 N \rightarrow \rho^0 N \rightarrow N^*(1535) \rightarrow \eta N \rightarrow K N$ или $K \Lambda \rightarrow N^*(1535) \rightarrow \eta N \rightarrow K N$.

Список литературы

- [1] D. Diakonov, V. Petrov, M. Polyakov, Z. Phys. A **359**, 305(1997).

- [2] T. Nakano et. al.(LEPS Collab.), Phys. Rev. Lett. **91**, 012002(2003).
- [3] A. Aleev et. al., arXiv: hep-ex/0803.3313, (2008).
- [4] M.I. Adamovich et. al.(WA 89 Collab.), Phys. Rev. C **72**, 055201(2005).
- [5] R. Mizuk et. al.(BELLE Collab.), Phys. Lett. B **362**, 173(2006).
- [6] R.A. Arndt, I.I. Strakovsky, and Workman, Phys. Rev. C **68**, 042201 (2003).
- [7] В. Б. Копеолович, УФН, **174**, 323(2004).
- [8] W.-M. Yao et. al. Particle Data Group, J. Phys. G **33**, 1(2006).
- [9] Л. Б. Окунь. Лептоны и кварки. М: Наука,1990.

Самосогласованные физические и математические модели диполя Герца и электрического вибратора

В. А. Неганов

*Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики, Россия*

Neganov-samara@yandex.ru

Обычно используется физическая модель бесконечно тонкого идеально проводящего диполя Герца (электрического диполя) (ДГ) [1], на котором задана поверхностная плотность тока $\vec{\eta}$ (в А/м), ориентируемая вдоль оси z в цилиндрической системе координат. В электродинамике поверхностная плотность тока связана с напряженностью магнитного поля $\vec{H} : \vec{\eta} = [\vec{n}_0, \vec{H}]$, где \vec{n}_0 - единичная нормаль к ДГ [2]. Для бесконечно тонкого ДГ нельзя на нем ввести H_φ , поэтому на его поверхности η_z не определяется через напряженность магнитного поля. Это несамосогласованная физическая модель [3]. Используя физическую модель ДГ [3] в виде идеально проводящей трубки малой, но конечной толщины, просто устанавливаем связь между η_z и H_φ на поверхности металла. Для классического ДГ вводят момент тока $I_z l$, где I_z - ток (в А), l - длина вибратора, для которого напряженности электрического и магнитного полей в точке расположения ДГ обращаются в бесконечности, что также не позволяет установить связь между током и напряженностями электромагнитного поля (ЭМП), что позволило И.Е. Тамму определить напряженности электрического и магнитного полей лишь как удобные математические (не физические) величины для определения характеристик ДГ в дальней зоне [4]. Для классического гармонического

ДГ возникает проблема и в ее математической модели: при отсутствии вариации поля вдоль оси φ (как это и делается) при использовании функции Грина в виде [1]:

$$G(p, q) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R},$$

где $R = |z - z'|$ - расстояние между точкой наблюдения $\vec{p}(\rho, \varphi, z)$ и точкой источника $\vec{q}(\rho', \varphi', z')$, (ω - частота, c - скорость света), возникает при $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ неинтегрируемая особенность. При введении трубчатой модели ДГ таких проблем не возникает: при $\vec{p} \rightarrow \vec{q}$ легко записывается сингулярная интегральная связь с особенностью Коши между $\vec{\eta}$ и \vec{H} .

Электрический вибратор (ЭВ) отличается от ДГ большей длиной l соизмеримой с длиной излучаемой волны и наличием зазора, в который включается генератор моохроматических колебаний. Для ЭВ также используется физическая трубчатая модель. Зазор ($z \in [-b, b]$, $\rho = a$) описывается с помощью стороннего электрического поля E_z^{AB} или напряжением U генератора. Для ДГ и ЭВ получено универсальное сингулярное интегральное представление (СИП) ЭМП через поверхностную плотность тока η_z . Например, для составляющей E_z оно имеет вид [3]

$$E_z(\rho, z) = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon} \int_{-l}^l J_z(z') [G_z(\rho, z - z') + G_z^\infty(\rho, z - z')] dz', \quad (2)$$

где

$$J_z(z') = \frac{d\eta_z}{dz}, \quad G_z^\infty(\rho, z - z') = -\frac{1}{4\pi\sqrt{a\rho}} \frac{z - z'}{(\rho - a)^2 + (z - z')^2},$$

ε - диэлектрическая постоянная среды, в которой находится вибратор, ε_0 - диэлектрическая постоянная вакуума, $G_z(\rho, z - z')$ - известное регулярное ядро [3].

Представляет интерес предельный переход при $\rho \rightarrow a$, $z \in [-l, l]$ (поле на поверхности вибратора). В этом случае

$$G_z^\infty(a, z - z') = \frac{1}{4\pi^2 a} \frac{1}{z - z'}.$$

Используя граничные условия на поверхности вибратора ($E_z(z) = -E_z^{AB}(z)$), где $E_z^{AB}(z)$ - стороннее электрическое поле в зазоре вибратора) нетрудно получить сингулярное интегральное уравнение я ядром Коши $t \in [-1, 1]$:

$$\int_{-l}^l \frac{J_z(z')}{z - z'} dz' + \int_{-l}^l J_z(z') P(z, z') dz' = \alpha E_z^{AB}(z), \quad (3)$$

относительно неизвестной производной поверхностной плотности тока $J_z(z')$, $P(z, z')$ - регулярное известное ядро.

Таким образом, для бесконечно тонкой идеально проводящей физической моделей ДГ и ЭВ возникает некорректно поставленная по Адамару [5] задача: решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода [3]. Для ЭВ в виде трубчатой модели возникает проблема решения СИУ первого рода: в этом случае некорректности не возникает.

При использовании СИП ЭМВ устраняется и разрыв между η_z и напряженностью магнитного поля \vec{H} [3].

В работе описан проекционный алгоритм решения (3) и получены комплексные распределения $\eta_z(z)$ при разных геометрических размерах ЭВ.

Аннотация

Обычно используемые физические модели диполя Герца (электрического диполя) (ДГ) и электрического вибратора (ЭВ) в виде бесконечно тонкого идеально проводящего провода не позволяет связать поверхностную плотность тока с напряженностью магнитного поля. Для классических ДГ и ЭВ возникают проблемы в их математических моделях: при отсутствии вариации поля вдоль азимутальной координаты при использовании экспоненциальной функции Грина для гармонического возбуждения при стремлении точки наблюдения к точке источника возникают неинтегрируемые особенности, что также препятствует предельному переходу поверхностной плотности тока на металле к напряженности магнитного поля.

В работе используются физические модели ДГ и ЭВ в виде идеально проводящей трубки малой, но конечной толщины, поэтому просто устанавливается связь в виде сингулярной интегральной связи с особенностью Коши между поверхностной плотностью тока и напряженностью магнитного поля. Для аналогичной трубчатой модели ЭВ получено сингулярное интегральное уравнение (СИУ) с ядром Коши относительно производной поверхностной плотности тока по вибратору и напряжением в зазоре ЭВ. В работе описан проекционный алгоритм решения СИУ и получены комплексные распределения поверхностной плотности тока при разных геометрических размерах ЭВ при заданном напряжении ЭВ.

Список литературы

- [1] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. – М. – Энергия. – 386 с.
- [2] Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 2005. – 648 с.
- [3] Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики – Н.: Сайнс – пресс, 2008. – 432 с.
- [4] Харченко К.П., Сухарев В.Н. «Электромагнитная волна», лучистая энергия - поток реальных фотонов. – М.: Комкнига, 2005 – 128 с.
- [5] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 223 с.

Самосогласованная теория плоской кольцевой антенны

В. А. Неганов

*Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики, Россия*

`Neganov-samara@yandex.ru`

Д. П. Табаков

*Поволжская государственная академия телекоммуникаций
и информатики, Россия*

`Dimatabakov@rambler.ru`

Плоская кольцевая антенна (ПКА) является одной из разновидностей рамочных антенн, нашедших самое широкое применение в радиотехнических системах. Теоретическому исследованию таких антенн было посвящено достаточно большое количество работ (например, [1]), но, как правило, расчет диаграммы направленности (ДН) антенны проводится в синфазном равноамплитудном приближении распределения тока [2]. Характерной особенностью многих работ является использование несамосогласованного подхода к расчету электромагнитного поля [3] (поле излучения антенны определяется по заданному из каких-то физических соображений распределению тока), который оправдан лишь при выполнении ряда условий для излучателей малых размеров. Также этот подход неприменим и для определения электромагнитного поля (ЭМП) в ближней зоне, потому что распределение полей на малом расстоянии от излучателя очень чувствительно к форме поверхностного тока. В настоящей работе представлена самосогласованная физическая модель антенны.

ПКА представляет собой лежащий в плоскости $z = 0$ бесконечно-тонкий идеально проводящий диск радиуса $a + \Delta$ с зазором $2\varphi_z$ (рис.1). Под действием вектора стороннего электрического поля \vec{E}_τ^{st} , приложенного к зазору ($\varphi \in [-\varphi_z, \varphi_z]$), на антенне возникает поверхностная плотность тока $\vec{\eta}$. На поверхности ПКА ($\rho \in [a - \Delta, a + \Delta]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$) выполняется граничное условие:

$$\vec{E}_\tau + \vec{E}_\tau^{st} = 0,$$

где \vec{E}_τ - вектор тангенциального электрического поля, возбуждаемый поверхностной плотностью тока $\vec{\eta}$.

Так как ширина идеально проводящей полоски 2Δ намного меньше длины волны λ , можно считать, что вектор поверхностной плотности тока $\vec{\eta}$ имеет только одну азимутальную составляющую:

$$\vec{\eta}(\rho, \varphi) = \vec{\varphi}_0 \eta_\varphi(\rho, \varphi),$$

где $\vec{\varphi}_0$ - единичный орт цилиндрической системы координат.

В данной постановке получена система сингулярных интегральных уравнений (СИУ) ($t \in [-1; 1], m = 0, \pm 1 \dots \infty$) :

$$\frac{4\vartheta}{W_e \xi} e_{m\varphi}^{st}(t) = \int_{-1}^1 \eta_{m\varphi}(t') R_m(t, t') dt' - 2 \frac{i}{\pi} (\vartheta^2 - m^2) \int_{-1}^1 \eta_{m\varphi}(t') \ln |t - t'| dt';$$

$$m = 0, 1 \dots \pm \infty, (1)$$

решение которой осуществлялось проекционным методом [4]. В выражении (1): $R_m(t, t')$ - регулярное известное ядро системы; $e_{m\varphi}^{st}(t)$, $\eta_{m\varphi}(t')$ - азимутальные Фурье - гармоники стороннего поля и поверхностной плотности тока; $\vartheta = ka, \xi = \Delta/a$, и $t = (\rho - a)/\Delta$ - нормированные переменные. Из системы СИУ (1) получены выражения для входного сопротивления, распределения полного тока и комплексной ДН ПКА. По результатам расчетов полученных выражений сделаны следующие выводы:

- распределение поверхностной плотности тока при определенных геометрических размерах антенны не является квазистатическим;
- при резонансе максимум поверхностной плотности тока протекает по радиусу, удовлетворяющему условию резонанса: $2\pi \rho_{rez}/\lambda = m, m = 0, 1 \dots \infty$;
- чем больше отношение ширины полоски к радиусу кольца, тем сложнее зависимость входного сопротивления от частоты;
- при $2\pi a/\lambda = 0.5$ в азимутальной плоскости ПКА имеет место однонаправленное излучение. Данный эффект не наблюдается при использовании синфазного равноамплитудного приближения распределения тока [2].

Список литературы

- [1] Неганов В.А., Святкин Н.М., Табаков Д.П. Электродинамический анализ электромагнитного поля кольцевой полосковой антенны // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2003. Т. 9. - №4 - С.38.
- [2] Лавров А.С. Резников Г.Б. Антенно-фидерные устройства. Учебное пособие для вузов. - М.: "Сов. радио", 1974. - 368 с.
- [3] Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики. - М.: Сайнс-Пресс, 2008. - 450 с.
- [4] Неганов В.А., Нефедов Е. И., Яровой Г. П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн - М.: Радио и связь, 2002.

Операторный подход к нахождению точных частных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Т. Г. Незбайло

Научно-производственное объединение, Россия

tiberiyn@rambler.ru

Излагается алгоритм операторного подхода к нахождению частных решений линейных дифференциальных уравнений второго и более высоких порядков в общем случае с переменными коэффициентами

On one eigenvalue problem relatively domain

A. A. Niftiyev

Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Azerbaijan

aniftiyev@yahoo.com

Eigenvalue problems are one of the intensively investigated fields of the spectral theory. These problems have significant applications, since some mechanical characteristics of certain systems indeed are described by the eigenvalues of the corresponding operators. Consider the following eigenvalue problem

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S_D. \quad (2)$$

Here $D \subset R^n$, $S_D = \partial D$ – its boundary. Let's denote by M the set of all convex bounded domains $D \subset R^n$. Define

$$K = \{D \in M, S_D \in C^2\}. \quad (3)$$

It is known ([1]) that the first eigenvalue of the problem (1), (2) may be calculated by the formula

$$\lambda_1(D) = \inf \frac{J_1(u, D)}{J_2(u, D)}, \quad (4)$$

where

$$J_1(u, D) = \int_D |\nabla u_x(x)|^2 dx, \quad J_2(u, D) = \int_D \rho(x)u^2(x)dx,$$

and inf is taken over all functions $u \in C^2(D)$, being equal to zero at S_D .

Formula (4) defines eigenvalue λ_1 of the problem (1), (2) as a functional of D .

Let us consider the following optimization problem:

$$J(D) = F(\lambda(D)) + G(\text{mes}(D)) \rightarrow \min, \quad D \in K. \quad (5)$$

Here $F(t), G(t)$ are continuously differentiable functions in $R^+ = \{t : t > 0\}$.

Theorem. If the domain $D^* \in K$ is a solution of the problem (1), (2), (5), then the following condition is valid

$$2F'(\lambda(D^*)) \cdot \lambda(D^*) = nG'(\text{mes}(D^*)) \cdot \text{mes}(D^*). \quad (6)$$

From the formula (6) we can obtain some results in particular cases.

REFERENCES

1. Mikhaylov V.S. Partial differential equations M.: Nauka , 1976, 391 p.

Разрешимости об одной краевой задачи для уравнения неклассического типа

М. А. Нурмамедов

Азербайджанская государственная нефтяная академия, Азербайджан

nurmamedov@mail.ru

Пусть G – ограниченная область в пространстве R^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, включающая часть гиперплоскости $x_n = 0$ и с гладкой границей

$$\partial G \in C^2, \quad G^+ = G \cap \{x_n > 0\}, \quad G^- = G \cap \{x_n < 0\}.$$

Положим $D = G \times (-T, T)$, $T > 0$; $S = \partial G \times (-T, T)$, $\Gamma = \partial D$ граница D .

В области D рассмотрим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} L_1(u, v) &= K_1^{(1)}(t) u_{tt} + K_2^{(1)}(x) \Delta_x u + \sum_{i=1}^n a_{i1}^{(1)} u_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_{i2}^{(1)} v_{x_i} + \\ &+ b_{11}(x, t) u_t + b_{12}(x, t) v_t + c_{11}(x, t) u + c_{12}(x, t) v = f_1(x, t), \\ L_2(u, v) &= K_1^{(2)}(t) u_{tt} + K_2^{(2)}(x) \Delta_x v + \sum_{i=1}^n a_{i1}^{(2)} u_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_{i2}^{(2)} v_{x_i} + \\ &+ b_{21}(x, t) u_t + b_{22}(x, t) v_t + c_{21}(x, t) u + c_{22}(x, t) v = f_2(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Будем всюду предполагать, что коэффициенты системы уравнения (1) достаточно гладкие. Кроме того, выполняются условия

- 1) $t \cdot K_1^{(i)}(t) > 0$ при $i = 1, 2, t \neq 0, t \in [-T, T]$;
- 2) $x_n \cdot K_2^{(i)}(x) < 0$ при $i = 1, 2, x_n \neq 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n$.

Отсюда вытекает, что квадратичная форма системы [1] является знакоменяющейся. Уместно отметить, что в работе [2] были исследованы знаконоопределённые уравнения, а в работах [4], [5], [6], [7] исследованы уравнения, имеющие всевозможные знакоопределённые квадратичные формы в одной области. Часто такие уравнения относятся к уравнениям неклассического типа.

Положим

$$\Gamma_{-T}^+ = \{(x, t) \in \Gamma : x_n > 0, t = -T\}, \quad \Gamma_{-T}^- = \{(x, t) \in \Gamma : x_n < 0, t = -T\}, \\ \Gamma_T^+ = \{(x, t) \in \Gamma : x_n > 0, t = T\}, \quad \Gamma_T^- = \{(x, t) \in \Gamma : x_n < 0, t = T\},$$

Краевая задача. Найти решение системы уравнений (1) в области \bar{D} , удовлетворяющее условиям

$$u = v|_{\Gamma} = 0, \quad u_t = v_t|_{\Gamma_T^+} = 0, \quad u_t = v_t|_{\Gamma_T^-} = 0. \quad (1)$$

Символом C_L – обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области \bar{D} , функций удовлетворяющих краевым условиям (1), а через $H_{1,L}(D), H_{2,L}(D)$ пространство С.Л.Соболева с весами, полученными замыканием класса C_L по норме:

$$\|u\|_{H_{1,L}}^2 = \int_D \left(u_t^2 + \left| k_2^{(1)}(x) \right| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + u^2 + v_t^2 + \left| k_2^{(2)}(x) \right| \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v^2 \right) dD,$$

$$\|u\|_{H_{2,L}}^2 = \int_D \left(u_{tt}^2 + v_{tt}^2 + \left| k_2^{(1)}(x) \right| \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 + \left| k_2^{(1)}(x) \right| \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \right. \\ \left. + \left(k_2^{(1)}(x) \right)^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}^2 + \left| k_2^{(2)}(x) \right| \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 + \right. \\ \left. + \left| k_2^{(2)}(x) \right| \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + \left(k_2^{(2)}(x) \right)^2 \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}^2 + u_t^2 + v_t^2 + u^2 + v^2 \right) dD.$$

соответственно. Имеет место

Теорем 1. Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned}
2b_{11}(x, t) - \left| k_{1t}^{(1)} \right| &\leq -\delta < 0; \\
2b_{22}(x, t) - \left| k_{1t}^{(2)} \right| &\leq -\delta < 0; \\
\sum_{i=1}^n \left| a_{i1}^{(j)} - k_{2x_n}^{(j)} \right|^2 &\leq M \left| k_2^{(j)} \right|; \\
\sum_{i=1}^n \left| a_{i2}^{(j)} - k_{2x_n}^{(j)} \right|^2 &\leq M \left| k_2^{(j)} \right|, \quad j = 1, 2
\end{aligned}
\quad (x, t) \in D,$$

$$x_n c_{11} > 0; \quad x_n c_{22} > 0 \text{ при } x_n \neq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in G \subset R^n,$$

где $M > 0$ константа. Тогда для любых функций $f_j(x, t)$ таких, что $f_j(x, t), f_{jt}(x, t) \in L_2(D), f_j(x, -T) = 0, j = 1, 2$ существует единственное решение задачи (1), (1) из пространства $H_{2,L}(D)$.

Анализ вынужденных колебаний дробных осцилляторов

Е. Н. Огородников

Самарский государственный технический университет, Россия

nik-yashagin@yandex.ru

Н. С. Яшагин

Самарский государственный технический университет, Россия

nik-yashagin@yandex.ru

В данной работе рассмотрены некоторые одномерные динамические модели с вязко-упругими элементами, являющимися дробными аналогами моделей Фойхта, Максвелла, Кельвина и др. Они могут быть использованы с одной стороны для изучения поведения вязко-упругого тела в динамике. С другой стороны, возникающие в рамках физической модели дифференциальные уравнения являются простыми математическими моделями линейных динамических систем, в которых диссипация механической энергии является следствием гипотезы о наследственной упругости. Решения этих линейных интегродифференциальных уравнений обладают рядом свойств, присущих нелинейным колебаниям, что делает их изучение особенно актуальным.

Дифференциальное уравнение одномерной динамической системы, вязкоупругие свойства которой в этом случае представлены обобщенной дробной моделью Фойхта, в безразмерных координатах имеет вид

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^n a_k D_{0t}^{\alpha_k} x = f(t), \quad (1)$$

где $x = x(t)$ — координата, $t \geq 0$ — время, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $f(t)$ — заданное возмущение; a_k и α_k — известные числовые параметры; $a_k \geq 0$, $\alpha_k \in (0, 2)$, $\alpha_0 \equiv 0$.

Обозначая далее дробный интеграл $I_a^\alpha x$ символом $D_{ax}^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$ и используя некоторые свойства интегродифференциальных операторов Римана-Лиувилля, нетрудно показать, что задача Коши

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

для уравнения (1) в классе функций $AC^1[0, T]$ редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра II-го рода

$$x(t) + \sum_{k=0}^n a_k D_{0t}^{-(2-\alpha_k)} x = F(t), \quad (2)$$

решение которого заведомо существует и единственно. Таким образом, основная проблема заключается в нахождении резольвенты интегрального уравнения (2).

Решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с дробными производными или дифференциальных уравнений дробного (нецелого) порядка не представляет больших трудностей, если дифференциальный оператор допускает факторизацию и уравнение может быть записано в виде

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (D_{0t}^{\alpha_i} - \lambda_{i,j}) u = f(t), \quad (3)$$

где $\lambda_{i,j}$ — корни многочлена

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - \lambda_{i,j}).$$

Рассмотрим уравнение (1) при $n = 2$, $a_0 = 0$. Если $\alpha_1 = 1 + \beta$, $\alpha_2 = 2\beta$, где $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$, то оно допускает факторизацию вида:

$$\left(D_{0t}^1 - \lambda_1 D_{0t}^\beta \right) \left(D_{0t}^1 - \lambda_2 D_{0t}^\beta \right) x = f(t), \quad (4)$$

где λ_1 и λ_2 — корни многочлена $\mu^2 + a_1\mu + a_2$.

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x(t) = c_1 \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} t E_{1-\beta} [\lambda_1 t^{1-\beta}; 2] + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} t E_{1-\beta} [\lambda_2 t^{1-\beta}; 2] \right\} + \\ + c_2 E_{1-\beta} [\lambda_2 t^{1-\beta}; 1] + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{0t, \lambda_1}^{2, 1-\beta} f + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} E_{0t, \lambda_2}^{2, 1-\beta} f,$$

где интегральный оператор $E_{0t, \lambda_k}^{2, 1-\beta} f$ определяется равенством

$$E_{0t, \lambda}^{\alpha, \sigma} f = \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\sigma} [\lambda(t - \tau)^{\sigma}; \alpha] f(\tau) d\tau,$$

где α, σ, λ — вообще говоря, комплексные числа, $Re\alpha, Re\beta > 0$.

Список литературы

- [1] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.
- [2] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск: НГУ, 1983, — 84 с.
- [3] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Новосибирск: Издательство СО АН СССР, 1962, — 255 с.
- [4] Нурмамедов М.А. О некоторых корректных краевых задачах для уравнения смешанного типа с перпендикулярными вырождениями / Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики: Меж.вуз.сб.науч.тр. // Новосибирск ун-т, Новосибирск, с. 104–107.
- [5] Нурмамедов М.А. Вторая краевая задача для уравнения смешанного типа с меняющимся направлением времени // тезисы докл. конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока. 1987, с.64–66.
- [6] Нурмамедов М.А. О разрешимости одной краевой задачи для системы уравнений смешанно-составного типа в многомерном пространстве. Вестник Бакинского Университета, серия физико-мат.наук, №1, 2008, Баку
- [7] Nurmamedov M.A. On the solvability of boundary value problems for quasi-linear and multidimensional systems equations of mixed type with changing time direction. International Conference Differential Equations and Topology Dedicated to the Centennial Anniversary of Lev Semenovitch Pontryagin Abstract Moscow State University, 17–22 June, 2008, pp 61-62.

[8] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, 407 с.

Adaptive Dynamics and Its Applications to Quantum Information

M. Ohya

Tokyo University of Science, Japan

ohya@rs.noda.tus.ac.jp

I will discuss the following four (1) - (4) below from both mathematical and philosophical views: (1) What is (or do we mean) the understanding of the existence? (2) We propose "Adaptive dynamics" to understand the existence. (3) The adaptive dynamics can be used to describe chaos. (4) The adaptive dynamics is applied to the SAT Quantum Algorithm to solve the NP complete problem.

Неархимедовы функции экспоненциального типа

Д. Н. Олешкевич

Белорусский государственный университет, Беларусь

oledim@inbox.ru

Я. В. Радыно

Белорусский государственный университет, Беларусь

radyno@bsu.by

1. Целая функция $\varphi : \mathbb{C} \ni z \mapsto \varphi(z) \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ называется функцией экспоненциального типа $\leq \nu$, если для некоторого $C > 0$ справедливо неравенство

$$|\varphi(z)| \leq Ce^{\nu|z|}, \text{ для всех } z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Обозначим $A_{\nu q}(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq +\infty$ множество целых функций экспоненциального типа $\leq \nu$, которые как функции от действительного переменного $x \in \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_x$ принадлежат пространству $L_q(\mathbb{R})$ [1],[2]. Для функций $\varphi \in A_{\nu q}(\mathbb{R})$ справедливо классическое неравенство С.Н. Бернштейна [1],[2]

$$\|\varphi^{(n)}\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq \nu^n \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R})}. \quad (2)$$

Неравенство (2) полностью характеризует функции экспоненциального типа, то есть если бесконечно дифференцируемая функция φ такая, что $\varphi^{(n)} \in L_q(\mathbb{R})$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ и для которой

$$\sup_{n \geq 0} \frac{\|\varphi^{(n)}\|_{L_q(\mathbb{R})}}{\nu^n} < +\infty, \quad (3)$$

то $\varphi \in A_{\nu q}(\mathbb{R})$.

2. Пусть \mathbb{K} локально компактное поле с нормой $|\cdot|_{\mathbb{K}}$. Обозначим $O = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq 1\}$, $P = \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$. Тогда $k_{\mathbb{K}} = O \setminus P$ – поле вычетов \mathbb{K} . Это конечное поле, характеристику которого обозначим p . На \mathbb{K} выберем меру Хаара dx , нормированную условием

$$\int_O dx = 1. \quad (4)$$

Выберем на \mathbb{K} характер χ так, чтобы $\ker \chi = 0$. Тогда остальные характеры будут иметь вид $\{\chi_a\}_{a \in \mathbb{K}}$, где $\chi_a(x) = \chi(ax)$ [3].

Преобразование Фурье функции $u : \mathbb{K} \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{K}} \chi(\xi x) u(x) dx \quad (5)$$

если этот интеграл существует.

3. Оператором Владимира [4], [5] называется псевдо-дифференциальный оператор вида

$$(D^n u)(x) = \int_{\mathbb{K}} \chi(-\xi x) |\xi|_{\mathbb{K}}^n \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Он корректно определяется с помощью обобщенных функций на \mathbb{K} и является естественным обобщением оператора дифференцирования.

Через $L_q(\mathbb{K}, \mathbb{C})$, $1 \leq q \leq +\infty$ обозначаются лебеговские пространства функций $u : \mathbb{K} \mapsto \mathbb{C}$, суммируемых по мере dx с естественными нормами [5].

Нас будут интересовать все функции $u \in L_q(\mathbb{K}, \mathbb{C})$, для которых справедливо неравенство С.Н. Бернштейна

$$\|Du\|_{L_q(\mathbb{K}, \mathbb{C})} \leq p^\nu \|u\|_{L_q(\mathbb{K}, \mathbb{C})} \quad (7)$$

Справедлива следующая

Теорема. Пусть \mathbb{K} – неархимедово локально компактное поле нулевой характеристики, p – характеристика его поля вычетов. Тогда множество функций $u \in L_2(\mathbb{K}, \mathbb{C})$ для которых $D^n u \in L_2(\mathbb{K}, \mathbb{C})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для которых справедливо неравенство (7) является замкнутым векторным подпространством в $L_2(\mathbb{K}, \mathbb{C})$, состоящим из локально постоянных функций $u \in L_2(\mathbb{K}, \mathbb{C})$ с параметром постоянства $\geq -\nu$ (то есть постоянных на шарах радиуса $\geq p^{-\nu}$).

Случай поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$ – p -адических чисел рассмотрен в [6].

Список литературы

- [1] Ахиезер Н.И., Лекции по теории аппроксимации, М., Наука, 1965.
- [2] Никольский С.М., Приближение функции многих переменных и теоремы вложения, М., Наука, 1969.
- [3] Вейль А. Основы теории чисел, М., Мир, 1972.
- [4] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. p -адический анализ и математическая физика, М., Наука, 1994.
- [5] Kochubei A.N. Pseudo-Differential Equations and Stochastics over non-Archimedean Fields. Marcel Dekker, 2001.
- [6] Радыно Я.В., Олешкевич Д.Н. p -адическое неравенство С.Н. Бернштейна // Докл. НАН Беларуси, 2006, т. 50, №6, с. 20-23.

Анализ корректности двумерных задач тепло- и массообмена

Н. А. Оршубеков

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан
al_jan@mail.ru

Проведен анализ общей постановки краевой задачи для тепло- и массообмена, с целью выделения среди них некорректно поставленных и влияния комплекснозначности коэффициентов на корректность задачи.

Степенная инфляция в описании тёмной материи и тёмной энергии

О. Г. Панина

Ульяновский государственный университет, Россия

realex@hotmail.ru

С. В. Червон

Ульяновский государственный университет, Россия

sv_chervon@rambler.ru

Рассмотрим 3-компонентную нелинейную сигма модель (НСМ), киральные поля которой описывают инфляционное поле (инфлатон) $\varphi^1 = \Phi$, поле тёмной энергии $\varphi^2 = \Psi$ и поле тёмного вещества $\varphi^3 = \chi$. Их взаимодействие описывается метрикой кирального пространства: $ds^2 = d\Phi^2 + \Phi^2 d\Psi^2 + d\chi^2$.

Уравнения кирального поля с потенциалом самодействия $W = W(\Phi, \Psi, \chi)$ в пространственно-плоской метрике Фридмана-Роберт-сона-Уокера (ФРУ) с учетом анзаца (Червон 2008) $\frac{1}{2}\Phi^2\dot{\Psi}^2 = \Lambda_\Psi$ принимают вид

$$3H\dot{\Phi} + \ddot{\Phi} - \frac{2\Lambda_\Psi}{\Phi} + \frac{\partial W}{\partial \Phi} = 0;$$

$$3H\frac{2\Lambda_\Psi}{\dot{\Psi}} - \frac{2\Lambda_\Psi\ddot{\Psi}}{\dot{\Psi}^2} + \frac{\partial W}{\partial \Psi} = 0;$$

$$3H\dot{\chi} + \ddot{\chi} + \frac{\partial W}{\partial \chi} = 0,$$

где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – параметр Хаббла.

Обозначим $L = \dot{\Phi}^2 + \dot{\chi}^2 + 2\Lambda_\Psi$. Тогда уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\dot{H} = -\kappa\frac{1}{2}L; \quad 3H^2 = \kappa(\frac{1}{2}L + W).$$

Таким образом, мы получили самосогласованную систему уравнений самогравитирующей 3-компонентной НСМ с полями тёмной материи и тёмной энергии.

В настоящей работе представлены классы решений данной системы, различающиеся по выбору зависимости потенциала W от киральных полей в

рамках космологической модели степенной инфляции с масштабным фактором $a(t) = a_0 t^m$. В частности, предполагая зависимость потенциала только от инфляционного поля Φ , найдено решение

$$\Phi = \frac{\sqrt{2\lambda}}{C_1 a_0^3} t^{-3m}; \quad \Psi = \frac{C_1 a_0^3}{3m+1} t^{3m+1} + C_3;$$

$$\chi = -\frac{3m C_3}{a_0^3} t^{-3m+1} + \chi_0.$$

При этом потенциал имеет вид

$$W = \frac{m(3m-1)}{\kappa} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{C_1 a_0^3} \right)^{-2/3m} \Phi^{2/3m}.$$

Анализируя вид полей, можно заключить следующее: происходит выход из инфляции, т.е. инфляционное поле Φ распадается (зависимость $\Phi(t)$ убывающая) и образуются частицы; тёмной энергии в процентном соотношении становится всё больше, т.к. $\Psi(t)$ возрастает; поле тёмной материи χ распадается, но медленнее чем Φ , следовательно, частицы тёмного вещества образуются позднее.

[1] S.Capozziello, S.Nojiri, S.D.Odintsov *Unified phantom cosmology*. hep-th/0507182.

[2] T.Matos, F.S.Guzman, L.A.Urena-Lopez *Scalar Field Dark Matter*. astro-ph/0102419.

[3] L.P.Climento, A.S.Jakubi *Scalar Field Cosmologies with Perfect Fluid in Robertson-Walker metric*. gr-qc/9506015.

[4] S.Ray, U.Mukhopadhyay, X.-H.Meng *Accelerating Universe with a Dynamic Cosmological Term*. astro-ph/0407295.

[5] С. В. Червон *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*. Ульяновск, 1997г.

[6] С. В. Червон, 2008г.

Некогерентное управление квантовыми открытыми системами

А. Н. Печень, Х. Рабиц

Принстонский Университет, США

apechen@gmail.com

Пусть $\mathcal{D}_n = \{\rho \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \rho \geq 0, \text{Tr} \rho = 1\}$ – множество всех состояний (матриц плотности) n -уровневой квантовой системы. Если система замкнута, то ее эволюция под действием когерентного управления описывается уравнением фон Неймана

$$\frac{d\rho_t}{dt} = -i \left[H_0 + \sum_l Q_l u_l(t), \rho_t \right], \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad (1)$$

Здесь H_0 – свободный гамильтониан системы; оператор Q_l определяет взаимодействие системы с управлением $u_l(t)$. Типичный целевой функционал имеет вид $J\{u_l\} = \text{Tr}[\rho_T O]$ для некоторых оператора $O = O^\dagger$ и $T > 0$. Уравнение (1) индуцирует унитарную эволюцию $\rho_t = U_t \rho_0 U_t^\dagger$ матрицы плотности, вследствие чего когерентное управление имеет следующие ограничения:

(O1) спектр ρ_t одинаков для всех t , и например, смешанное состояние не может быть переведено в чистое (унитарные преобразования матрицы плотности сохраняют спектр).

(O2) когерентное управление, оптимальное для начального состояния ρ_0 может не быть оптимальным для другого начального состояния $\tilde{\rho}_0$ даже если спектры ρ_0 и $\tilde{\rho}_0$ совпадают ($U_t \rho_0 U_t^\dagger \neq U_t \tilde{\rho}_0 U_t^\dagger$ если $\rho_0 \neq \tilde{\rho}_0$).

В докладе будет рассказано о некоторых методах некогерентного управления, способных обойти ограничения (O1, O2). В таких методах квантовая система приводится в контакт с внешним резервуаром, состояние которого и взаимодействие с системой служат управляющими параметрами. Будут изложены способы управления с помощью некогерентного излучения и столкновений с частицами среды малой плотности [1, 2] и управление посредством квантовых измерений [3]. Динамически эволюция квантовой открытой системы с некогерентным управлением в марковском приближении описывается мастер-уравнением

$$\frac{d\rho_t}{dt} = -i \left[H_0 + H_{\text{eff}} + \sum_l Q_l u_l(t), \rho_t \right] + \mathcal{L}[n_{\mathbf{k}, \alpha}(t)] \rho_t \quad (2)$$

где супероператор \mathcal{L} описывает негамильтонов вклад резервуара и зависит от некогерентного управления $n_{\mathbf{k}, \alpha}(t)$ – плотности частиц резервуара с моментом \mathbf{k} и внутренней степенью свободы α .

Аналогом унитарных преобразований для некогерентного управления являются вполне положительные сохраняющие след отображения $\Phi : \mathcal{D}_n \rightarrow \mathcal{D}_n$. Пусть \mathcal{CP}_n – множество всех таких отображений для n -уровневой квантовой системы. Любое $\Phi \in \mathcal{CP}_n$ может быть представлено (неединственным образом) в виде $\Phi(\rho) = \sum_{i=1}^{n^2} K_i \rho K_i^\dagger$, где операторы $K_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n^2} K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}_n$, задающему многообразию Штифеля $V_n(\mathbb{C}^{n^2})$. Целевая функция имеет вид $J[\{u_i\}, n_{k,\alpha}] = \text{Tr}[\rho_T O]$ в динамической и $J[K_1, \dots, K_{n^2}] = \text{Tr}[\sum_{i=1}^{n^2} K_i \rho K_i^\dagger O]$ (здесь $J : V_n(\mathbb{C}^{n^2}) \rightarrow \mathbb{R}$) в кинематической формулировке.

Теорема 1 Для любого $\rho_f \in \mathcal{D}_n$ существует $\Phi_{\rho_f} \in \mathcal{CP}_n$ такое, что $\Phi_{\rho_f}(\rho) = \rho_f$ для всех $\rho \in \mathcal{D}_n$.

Важность этого результата в том, что он показывает отсутствие ограничений (O1,O2) для некогерентного управления [4].

Практический поиск оптимального управления в лабораторных условиях основан на использовании различных алгоритмов, таких как градиентные методы. Успешность их применения зависит от отсутствия у целевой функции локальных экстремумов, не являющихся его глобальными экстремумами (такие экстремумы будем называть просто локальными экстремумами). Поэтому проблема исследования целевого функционала на наличие локальных экстремумов имеет важное практическое значение. В предположении полной управляемости системы в кинематической формулировке отсутствие локальных экстремумов утверждается следующей теоремой.

Теорема 2 Для любых ρ и O , целевая функция $J[K_1, \dots, K_{n^2}]$ не имеет локальных максимумов и минимумов на многообразии Штифеля $V_n(\mathbb{C}^{n^2})$.

Для случая $n = 2$ теорема доказана в [5]. Случай произвольного n рассмотрен в работе [6].

Теоремы 1 и 2 характеризуют свойства некогерентного управления в кинематической формулировке. Открытой проблемой является изучение степени управляемости и наличия локальных экстремумов в динамической формулировке.

Список литературы

- [1] A. Pechen and H. Rabitz, *Phys. Rev. A* **73**, 062102 (2006).
- [2] A. Pechen and H. Rabitz, Preprint arXiv 0801.3467
- [3] A. Pechen, N. Il'in, F. Shuang and H. Rabitz, *Phys. Rev. A* **74**, 052102 (2006).

- [4] R. Wu, A. Pechen, C. Brif and H. Rabitz, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 5681 (2007).
- [5] A. Pechen, D. Prokhorenko, R. Wu and H. Rabitz, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 045205 (2008).
- [6] R. Wu, A. Pechen, H. Rabitz, M. Hsieh and B. Tsou, *J. Math. Phys.* **49**, 022108 (2008).

Кластеризация на российском фондовом рынке

А. С. Пивоварова, А. А. Стеряков

Самарский государственный аэрокосмический университет

lubopitnij@mail.ru

Финансовые рынки представляют собой сложные системы, изучаемые экономистами, математиками, а с недавних пор также и физиками [1]. Парадигма финансовой математики заключается в том, что временные отсчеты ретернсов (returns - относительное изменение цен) акций непредсказуемы. Анализ корреляционных отношений между различными акциями, представленными на фондовом рынке важен для построения наиболее оптимального делового портфеля. Та же информация необходима для поиска и исследования природы общих (т.е. влияющих на несколько акций одновременно) экономически факторов, которые управляют ценовой динамикой.

В работе используется визуальный метод анализа подобных отношений, предложенный в [2] для акций российского фондового рынка. Визуализируемое пространство является графом, соединяющим акции анализируемого портфеля. Построение графа начинается с матрицы коэффициентов корреляции, вычисляемых между всеми парами акций портфеля (для временных рядов разностей логарифмов цен дневных котировок):

$$\rho_{ij} = \frac{\langle Y_i Y_j \rangle - \langle Y_i \rangle \langle Y_j \rangle}{\sqrt{(\langle Y_i^2 \rangle - \langle Y_i \rangle^2)(\langle Y_j^2 \rangle - \langle Y_j \rangle^2)}},$$

где i и j номера акций, $Y_i = \ln P_i(t) - \ln P_i(t-1)$ и $P_i(t)$ - цена закрытия i акции в день t . Знак усреднения означает усреднение по времени, выполненное по всем дням исследуемого временного отрезка.

Полученные корреляционные коэффициенты пар акций не могут быть использованы для определения "расстояния" между акциями, т.к. на них не

выполняются три аксиомы Евклидовой метрики. Однако обобщенная метрика, используемая в качестве расстояния, может быть определена соответствующей функцией от коэффициентов корреляции. В работе [3] предложен следующий выбор для метрики на пространстве акций:

$$d(i, j) = \sqrt{2(1 - \rho_{ij})}.$$

Матрица расстояний d используется далее для построения минимально разветвленного дерева (minimal spanning tree) [1], связывающего акции в портфеле. Минимально разветвленное дерево полезно тем, что наглядно показывает расположение акций, выделяя наиболее сильные отношения между каждой точкой их множества. Кроме того построенное дерево напрямую дает субдоминантную метрику иерархической организации акций в исследуемом портфеле, которая является ультраметрикой.

Опишем метод построения [3]. Пусть множество M содержит n элементов x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Элементы матрицы $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ упорядочиваются по их значению в порядке неубывания: $d_{i_1 i_2} \leq d_{i_3 i_4} \leq d_{i_5 i_6} \leq d_{i_7 i_8} \leq \dots$. Построение начинается с наименьшего элемента $d_{i_1 i_2}$. На плоскости ставятся две точки, которые соответствуют элементам x_{i_1} и x_{i_2} , соединенные отрезком длиной $d_{i_1 i_2}$. Рассматривается следующий элемент $d_{i_3 i_4}$. Если ни один из индексов i_3 и i_4 не совпадает с индексом i_1 и i_2 ,

на той же плоскости ставятся точки x_{i_3} и x_{i_4} , соединенные отрезком длиной $d_{i_3 i_4}$. Если же индекс i_3 или i_4 совпадает с одним из индексов i_1 или i_2 , например, $i_2 = i_3$, на плоскости ставится точка x_{i_4} и соединяется с точкой x_{i_2} отрезком длиной $d_{i_3 i_4} = d_{i_2 i_4}$. Данная процедура продолжается до перебора всех элементов матрицы d_{ij} . В результате на плоскости возникает граф - минимально разветвленное дерево.

Субдоминантная ультраметрика $\bar{d}(x_{i_1}, x_{i_k})$ между элементами x_{i_1} и x_{i_k} на M определяется как расстояние между точками x_{i_1} и x_{i_k} этого графа следующим образом:

$$\bar{d}(x_{i_1}, x_{i_k}) = \text{Max}_{2 \leq j \leq k} \{d(x_{i_{j-1}}, x_{i_j})\},$$

где элементы $x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, \dots, x_{i_{k-1}}$ последовательно образуют вершины ломаной линии, образующей единственной путь, соединяющий элементы x_{i_1} и x_{i_k} на дереве.

В данной работе строится минимально разветвленное дерево 10-ти компаний, акции которых наиболее ликвидны на российском фондовом рынке: Банк ВТБ (VTBR), Вымпелком (ADR), Газпром (GAZP), Лукойл (LKOH), МТС (MBT), Норильский никель (GMKN), Роснефть (ROSN), Сбербанк

(SBER), Сургутнефтегаз (SNGS), Ростелеком (РТКМ), которое иллюстрирует иерархическую структуру российского фондового рынка и может быть использовано для построения наиболее оптимального портфеля.

Литература

1. Mantenga R.N., Stanley H.E, An Introduction to Econophysics. Correlations and Complexity in Finance, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
2. Mantenga R.N. Hierarchical structure in financial market, Eur.Phys.J. B 11 (1999) 193.
3. Rammal R., Toulouse G., Virasoro M.A., Ultrametricity for physicists. Rev. Mod. Phys. 589 (1986) 765.

О спектральных свойствах волнового оператора на многообразиях типа Фридмана

Е. В. Писковский

Московский физико-технический институт, Россия

piskovskiev@yahoo.com

На настоящий момент существует хорошо развитая теория для эллиптических дифференциальных операторов [1]. Для гиперболических операторов краевая задача при помощи разделения переменных обычно сводится к задаче из спектральной теории для эллиптических уравнений [1].

Задача на собственные значения для дифференциального оператора, определенного в пространстве суммируемых с квадратом функций над многообразием типа Фридмана, формулируется следующим образом [2], [3]: пусть $(M, g_{\mu\nu})$ - это $(n+1)$ - мерное псевдориманово многообразие, а $g_{\mu\nu}$ -это метрический тензор на нем (более детально многообразие и вид метрики будут описаны ниже), требуется найти значения вещественного параметра λ и собственные функции $f(x)$, $x \in M$ из класса $C^2(M)$, отвечающие уравнению

$$\square f + \lambda f = 0, \quad (1)$$

и условию интегрируемости с квадратом на многообразии M

$$\int_M f^2 \sqrt{g} dx < \infty. \quad (2)$$

В докладе рассматривается оператор, соответствующий гиперболическому дифференциальному уравнению Клейна-Гордона. При помощи метода

разделения переменных заданный дифференциальный оператор представляется в виде суммы двух тензорных произведений четырех линейных дифференциальных операторов. Основным результатом является следующая

Теорема. Пусть H' и H'' - два сепарабельных гильбертовых пространства; операторы A', V , с областями определения $D(A') \subset H'$, $D(V) = H'$ и оператор $A'' : D(A'') \subset H''$. Пусть оператор V - ограничен и самосопряжен во всем H' , операторы A' и A'' самосопряжены в существенном на $D^e(A') \subset H'$ и $D^e(A'') \subset H''$, а самосопряженное расширение оператора A'' в пространстве H'' имеет дискретный спектр $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$. Тогда оператор

$$B = A' \otimes I + V \otimes A'', \quad D(A) = D(A') \otimes D(A'') \quad (3)$$

самосопряжен в существенном в пространстве $H' \otimes H''$.

Также в докладе рассмотрен пример многообразия типа Фридмана - пространство де Ситтера: $M = \mathbb{R} \times S^3$, $a(t) = ch(t)$, здесь $h_{ij}y^i y^j$ - метрика на трехмерной сфере.

После разделения переменных уравнение примет вид

$$\ddot{B}(t)\psi(x) + \left[\frac{\alpha}{ch^2(t)} - \nu^2 \right] B(t)\psi(x) = 0, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

здесь $f = ch^{-3/2}(t)B(t)\Phi(y) \in L^2(M)$. Для этого случая в [2] была доказана теорема:

Теорема. Решение уравнения принадлежат классу $L^2(\mathbb{R})$, если параметры α и ν отвечают соотношению

$$0 < \nu = 1/2(\sqrt{1 + 4\alpha} - 1) - n. \quad (5)$$

Здесь параметры λ и ν связаны соотношением: $\nu^2 = \lambda - 9/4$. При этом существуют всего два значения параметра λ , при которых решение рассматриваемого уравнения принадлежат $L^2(M)$. Именно:

$$\lambda = 0 \text{ и } \lambda = 2.$$

Этим значениям соответствуют бесконечные серии решений. Применяя основной результат, изложенный в докладе, можно утверждать, что в рассмотренном случае спектр описан полностью и других собственных значений не существует. Таким образом, описывается полный набор собственных функций в пространстве $L^2(M)$, поскольку набор этих собственных функций - всевозможные произведения базисных векторов пространств $L^2(\mathbb{R}, ch^3(t)d\mu)$ и $L^2(S^3, \sqrt{h}dy)$.

Автор благодарен чл.-кор. РАН И.В. Воловичу за совместную работу над этим докладом.

Доклад основан на совместной работе с чл.-кор. РАН И.В. Воловичем.

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Список литературы

- [1] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1981.
- [2] В.В. Козлов, *Суммируемые с квадратом решения уравнения Клейна-Гордона на пространстве де Ситтера*, УМН, 1987, Т. 42, Вып. 4, стр. 171.
- [3] И.В. Волович, В.В. Козлов, *О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна - Гордона на многообразиях*, Доклады РАН, 2006, т.408, №3,стр. 317-320.
- [4] V.V. Kozlov, I.V. Volovich, *Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.3:1349-1358,2006;
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603111>.

On spectral properties of D'Alembertian on the Friedman type manifolds

E. V. Piskovski

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Russia

piskovskiev@yahoo.com

At the moment there is a well-developed theory for elliptic differential operators (see i.e. [1]). Eigenvalue problem for hyperbolic operators is reduced by means of separation variables method to eigenvalue problem for elliptic ones (see i.e. [1]).

Eigenvalue problem for a differential operator, defined in the space of square integrable functions over the Friedman type manifolds, is formulated as follows read [2], [3]: let $(M, g_{(\mu\nu)})$ - is $(n-1)$ - pseudo-Riemannian manifold, and $g_{(\mu\nu)}$ - metric tensor on M (in more detail variety and type of metrics will be defined below), to search for the real eigenvalue λ eigenfunctions $f(x), x \in M$ which belong to the class $C^2(M)$, meet the following equation

$$\square f \lambda f = 0 \tag{1}$$

and square integrability condition on the manifold M

$$\int_M f^2 \sqrt{g} dx < \infty. \tag{2}$$

The operator under consideration is the one that corresponds to hyperbolic differential equation Klein-Gordon. Having applied the decomposition of variables method to the operator becomes represented as the sum of two tensor

products of four linear differential operators. The main result is the following

Theorem. Let H' and H'' be two separable Hilbert spaces; operators A', V , densely defined on $D(A') \subset H'$, $D(V) = H'$ and operator $A'' : D(A'') \subset H''$. Let operator V be self-adjoint and bounded in H' , let operators A' and A'' be essentially self-adjoint on $D^e(A') \subset H'$ and $D^e(A'') \subset H''$. Let's take for granted that self-adjoint expansion of A'' in space H'' and its spectrum is discrete: $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$. Then the operator

$$B = A' \otimes IV \otimes A'', \quad D(A) = D(A') \otimes D(A'') \quad (3)$$

is essentially self-adjoint in $H' \otimes H''$.

De Sitter space which is an example of the Friedman-type manifolds is considered in the report presented: $M = (R) \times S^3, a(t) = ch(t)$, here $h_{ij}y^i y^j$ - metric on three-dimensional sphere.

Having applied the variables decomposition method in this case we get

$$\ddot{B}(t)\psi(x) + \left[\frac{\alpha}{ch^2(t)} - \nu^2 \right] B(t)\psi(x) = 0, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

here $f = ch^{-3/2}(t)B(t)\Phi(y) \in L^2(M)$. In this case the following theorem was formulated [2]:

Theorem. Solution to the equation concerned is of class $L^2((R))$, if the parameters α and ν meet the ratio

$$0 < \nu = 1/2(\sqrt{14 \alpha} - 1) - n, \quad (5)$$

here parameters λ and ν related by: $\nu^2 = \lambda - 9/4$. There is an important fact about parameter values: if

$$\lambda = 0 \text{ or } \lambda = 2$$

then the solution to the equation is of $L^2(M)$ class. Such parameter values correspond to a family of square integrable solutions. Applying the main result outlined in the present report it can be stated that in latter case the spectrum of operator is completely described. A complete set of its eigenfunctions of class $L^2(M)$ is described as well because the set of eigenfunctions is all possible productions of basis vectors in $L^2((R), ch^3(t)d\mu)$ and $L^2(S^3, \sqrt{h}dy)$.

The author of this thesis would like to thank corr.-mem. of RAS I.V. Volovich for joint work on this publication.

The work described was supported in part by RFBR grant RFFI 08-01-00727-a and in part by RFBR grant for leading scientific schools of Russia No. 3224.2008.1.

References

- [1] V.S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics (Translated from Russian)*, Mir, Moscow, 1984.
- [2] V.V. Kozlov, *Uspechi Matematicheskikh Nauk*, 1987, v. 42, N. 4, p. 171.
- [3] I.V. Volovich, V.V. Kozlov, *Dokladi Russian Academy of Sciences*, 2006, v.408, N3, pp. 317-320.
- [4] V.V. Kozlov, I.V. Volovich, *Finite Action Klein-Gordon Solutions on Lorentzian Manifolds*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*3:1349-1358,2006, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603111>.

Деформирование упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей

Ю. М. Плескачевский

Белорусский национальный технический университет, Беларусь
pleskum@mail.ru

Е. Э. Старовойтова

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
edstar@mail.by

Рассмотрена задача о квазистатическом деформировании несимметричного трехслойного стержня с жестким заполнителем, имеющего ступенчатую нижнюю границу. Для описания кинематики пакета принята гипотеза "ломаной нормали": в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в более толстом жестком заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. На границах склейки слоев перемещения непрерывны. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительноному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Для описания нерегулярности нижней границы используется функция Хевисайда $H(x - x_0)$, где x_0 – координата сечения, в котором происходит ступенчатое изменение толщины второго слоя. Деформации малые.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. В результате система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая равновесия трехслойного стержня с нерегулярной границей, в одной из областей имеет следующее решение:

$$\psi_1(x) = C_{21}sh(\beta_1x) + C_{31}ch(\beta_1x),$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta_1} \left[sh(\beta_1x) \int (\gamma_{21}p + \gamma_{11}(qx + C_{11})) ch(\beta_1x) dx - \right. \\ & \left. - ch(\beta_1x) \int (\gamma_{21}p + \gamma_{11}(qx + C_{11})) sh(\beta_1x) dx \right] = \\ & = C_{21}sh(\beta_1x) + C_{31}ch(\beta_1x) - \frac{1}{\beta_1^2} [\gamma_{21}p + \gamma_{11}(qx + C_{11})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx - a_7p \frac{x^3}{6} + a_1q \frac{x^4}{24} + \frac{a_1C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51}x + C_{61} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\frac{\alpha_{11}}{\beta_1} \left[C_{21}ch(\beta_1x) + C_{31}sh(\beta_1x) - \frac{x}{\beta_1} \left(\gamma_{21}p + \gamma_{11} \left(\frac{1}{2}qx + C_{11} \right) \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - a_7p \frac{x^3}{6} + a_1q \frac{x^4}{24} + \frac{a_1C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51}x + C_{61}, \end{aligned}$$

$$u_1(x) = \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4p \frac{x^2}{2} + a_7q \frac{x^3}{6} + \frac{a_7}{2} C_{11} x^2 \right] + C_{71}x + C_{81}.$$

В другой области решение будет иметь подобный вид, но с другими коэффициентами и константами интегрирования C_{21}, \dots, C_{28} .

Операторы внутренней суперпозиции в лебеговых пространствах

Т. К. Плышевская

Магнитогорский государственный университет, Россия

plish@mail.ru

Л. А. Минаждинова

Магнитогорский государственный университет, Россия

lilli05@mail.ru

Пусть T - локально компактное пространство, счетное в бесконечности; λ - положительная мера на T . Через $L_p^n(T, \lambda)$, $p \in [1, \infty)$ обозначим банахово пространство суммируемых в степени относительно меры λ функций $y : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|y\|_{L_p^n(T, \lambda)} = \left(\int \|y(t)\|^p d\lambda(t) \right)^{1/p}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ - норма в \mathbb{R}^n .

Пусть $T_1 \supseteq T$. Зададим отображение $\tau : T \rightarrow T_1$ и матрицу q размерности $n \times n$ с компонентами $q_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим $E = \{t \in T : \tau(t) \in T\}$ и χ_E - характеристическая функция множества E .

Оператор внутренней суперпозиции S зададим равенством

$$(Sy)(t) = \chi_E(t)q(t)y(\tau(t)).$$

Сужение функции /меры/ f на множество A обозначено через f_A . Через $\mathcal{K}(T)$ обозначим пространство непрерывных функций $y : T \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем.

Всюду далее будем предполагать пару (π, g) λ - приспособленной по Н.Бурбаки. Всякая λ - приспособленная пара (π, g) определяет на T_1 меру μ , которая задается равенством

$$\int f(s)d\mu(s) = \int g(t)f(\pi(t))d\lambda(t), \quad f \in \mathcal{K}(T_1)$$

Меру μ будем обозначать через $\pi(g\lambda)$.

Лемма Пусть $p \in [1, \infty)$, λ - положительная мера на T , пара $(\tau_E, \|q_E\|^p)$ λ_E - приспособлена и $\|q_E\|^p$ ограничена. Пусть далее существуют такие неотрицательные числа α, Δ , что для любого λ -измеримого множества $A \subset T$ множество $\tau^{-1}(A) \cap \{t \in E : \|q(t)\| > 0\}$ λ -измеримо и

$$\lambda(\tau^{-1}(A) \cap \{t \in E : \|q_E(t)\| > 0\}) \leq \alpha\lambda(A) + \Delta$$

Тогда: 1) Существуют положительная мера ν на T и число M такие, что пара $(\tau_E, \|q_E\|^p) \nu_E$ -приспособлена и

$$\mu = \tau_E(\|q_E\|^p \nu_E) \leq M\nu;$$

2) для любой ν -интегрируемой функции y функция $\|q_E(\cdot)\|^p \|y(\tau_E(\cdot))\| \nu_E$ -интегрируема.

Теорема В условиях леммы 1 существует мера ν такая, что оператор внутренней суперпозиции S непрерывно отображает пространство $L_p^n(T, \nu)$ в себя и $\|S\|_{\nu \rightarrow \nu} \leq M^{\frac{1}{p}}$.

Специальный выбор меры ν по виду оператора S позволяет существенно расширить изучаемый класс операторов внутренней суперпозиции, для которых выполнено условие действия оператора в лебеговых пространствах.

Получены условия сходимости последовательности операторов внутренней суперпозиции, которые позволяют рассмотреть вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра для уравнений с отклоняющимся аргументом.

Преобразование Дарбу функций Грина уравнения Дирака

Е. О. Поздеева

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Россия

ekatpozdeeva@mail.ru

Метод конструирования новых аналитически решаемых дифференциальных уравнений с помощью сплетающих дифференциальных операторов из уравнений, которые имеют аналитические решения, называется методом преобразований Дарбу [1,2,3].

В 2004 году С.В. Сакумар рассмотрел преобразование Дарбу функции Грина уравнения Шредингера на конечном интервале и получил формулу разности следов преобразованной и исходной функций Грина [4]. Назовем формулу следа разности преобразованной и исходной функций Грина уравнения Шредингера следовой формулой Сакумара.

Нами в работах [5,6,7] подробно рассмотрено преобразование Дарбу функции Грина уравнения Дирака на конечном интервале. В работах [5,6] получен аналог следовой формулы Сакумара для уравнения Дирака с определенными потенциалами. В работе же [7] результаты представлены в наиболее общем виде и верны в независимости от выбора исходного потенциала и

особенностей краевых условий наложенных на решения уравнения Дирака на концах интервала.

В данной работе мы рассматриваем преобразование Дарбу функции Грина уравнения Дирака на полуоси и всей вещественной оси. Кроме того, мы применяем для рассматриваемых нами случаев наиболее общий вид аналога следовой формулы Сакумара для уравнения Дирака.

- [1] G. Darboux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **94**, 1456 (1882).
- [2] M. Crum, *Quat. J. Math.*, **6**, 121 (1955)
- [3] V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Berlin, Springer (1991).
- [4] C. V. Sukumar, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, 10287 (2004).
- [5] E. Pozdeeva, *Int. Jour. Mod. Phys. A*, **23**, 247 (2008).
- [6] E. Pozdeeva, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**, 145208 (2008).
- [7] E. Pozdeeva and A. Schulze-Halberg, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **41**, 265201 (2008).

Quantum transport at the presence of disorder in quantum-like games. Experimental results

M. A. Popov
Oxford University, UK
Michael282@ya.ru

Решение одномерной стохастической краевой задачи ползучести методом малого параметра

Н. Н. Попов

Самарский государственный технический университет, Россия

ponick25@gmail.com

Учет стохастических неоднородностей материала, которые обусловлены различными технологическими и структурными факторами, приобретает особую важность для элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, поскольку известно, что опытные данные по деформации ползучести, полученные при испытаниях на стандартных образцах, имеет значительный разброс. В связи с этим является актуальной разработка методов решения стохастических нелинейных краевых задач теории ползучести.

Рассматривается нелинейная краевая задача о всестороннем растяжении усилиями p бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием радиуса a . Задача решается в полярной системе координат для случая плоского напряженного состояния, в предположении, что стохастические свойства материала пластины описываются при помощи случайной однородной функции одной переменной (радиуса). Определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, принимаются в стохастической форме:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= \frac{c}{2}s^{n-1}(2\sigma_r - \sigma_\varphi)(1 + U(r)), \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= \frac{c}{2}s^{n-1}(2\sigma_\varphi - \sigma_r)(1 + U(r)),\end{aligned}\quad (1)$$

где $s^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r\sigma_\varphi$ — интенсивность напряжений, σ_φ и σ_r — компоненты тензора напряжений, ε_φ и ε_r — компоненты тензора деформаций, $U(r)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала, c , n и α — постоянные материала.

К определяющим соотношениям ползучести (1) присоединяются уравнение равновесия для напряжений

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} = 0, \quad (2)$$

условие совместности деформаций

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r = 0, \quad (3)$$

и граничные условия

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(\infty) = p. \quad (4)$$

На основе метода малого параметра стохастическая нелинейная задача ползучести (1)–(4) сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эта система решалась численно методом Адамса–Мултона V порядка.

Проведен статистический анализ случайного поля напряжений. Найдены дисперсии напряжений, характеризующие разброс напряжений около среднего значения. Показано, что дисперсия тангенциального напряжения σ_φ принимает наибольшее значение на контуре отверстия, а дисперсия радиального напряжения σ_r на этом контуре равна нулю. Удаляясь от контура отверстия, дисперсии напряжений достаточно быстро приближаются к постоянным значениям, совпадающим с их значениями для бесконечной пластины без отверстия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00478-а)

Создание фрактальных моделей на основе формализма неаналитических функций, скейлинга и дробных операторов

А. А. Потапов

Институт радиотехники и электроники РАН, Россия

potapov@mail.cplire.ru

В докладе представлены многочисленные приложения созданных автором фрактальных методов, использующие дробные размерности, дробные операторы и эффекты скейлинга. Основные принципы данного направления разрабатываются автором в ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН, начиная с 80-х гг. XX в., и вначале касались вопросов фильтрации сверхслабых радиосигналов и изображений при существенно негауссовских помехах. В докладе рассмотрены следующие "фрактальные" направления: (1)-синергетический подход к радиофизическим задачам радиотехники, электроники и радиолокации; (2)-фрактальные меры и фрактальные сигнатуры; (3)-избранные результаты фрактальной фильтрации малококонтрастных объектов (в том числе и стелс - объектов); (4)-топология выборки и фрактальная цифровая обработка изображений; (5)-фрактальные распределения или паретианы; (6)-разработка эталонного словаря фрактальных признаков классов целей и проектирование первого фрактального непараметрического обнаружителя радиосигналов; (7)-странные аттракторы в фазовом пространстве отраженных радиолокационных сигналов диапазона мил-

лиметровых радиоволн; (8)-концепция фрактальных радиоэлементов и фрактальных радиосистем; (9)-фрактальные антенны и фрактальные частотно-избирательные структуры на их основе; (10)-физическое моделирование фрактальных импедансов, дробных операторов и фрактальных конденсаторов; (11)-методы построения фрактальных сигналов и фрактальные методы передачи информации; (12)-фрактальная обработка медицинской информации; (13)-стратегические приложения новых информационных технологий. По данному направлению выпущено в свет несколько монографий и опубликовано более 250 научных работ.

О решении стохастических краевых задач ползучести методом Монте-Карло

В. П. Радченко, А. Ю. Маргаритов

Самарский государственный технический университет, Россия

radch@samgtu.ru

Получение аналитических решений стохастических краевых задач ползучести затруднительно в силу физической и стохастической нелинейности уравнений состояния материала. Поэтому одним из эффективных методов решения такого рода задач является метод Монте-Карло (метод статистических испытаний). Предполагается, что краевая задача сведена к системе уравнений, содержащих конечное число случайных параметров и функций с известной плотностью распределения или корреляционной функцией. Кинетические и силовые граничные условия считаются детерминированными. Зная известные законы для плотности распределения или корреляционной функции, генерируются отдельные реализации для случайных функций и каждый раз решается детерминированная краевая задача (как правило, методами дискретной математики). Далее для спектра детерминированных решений стандартными методами математической статистики определяются статистические оценки соответствующих параметров полей напряжений, деформаций и перемещений.

Выполнена обстоятельная проверка адекватности и погрешности метода Монте-Карло приближенному аналитическому решению, построенному методом малого параметра до четвертого порядка, для ряда модельных задач в цилиндрической системе координат. Показано, что погрешность решения для дисперсий напряжений и деформаций методом Монте-Карло по отношению к аналитическому решению составляет не более 6% для равномерного приближения и менее 1% — для среднеквадратического приближения.

Обсуждаются вопросы применения разработанного метода в прикладных задачах. Одной из основных проблем является построение стохастических реологических моделей материала (физические уравнения состояния), которое требует большого объема экспериментальных данных, получение которых в условиях ползучести (при наличии фактора времени) является крайне сложной задачей преимущественно в силу большой длительности испытаний на ползучесть, которая может составлять десятки тысяч часов. Кроме этого возникают серьезные проблемы вычислительного характера при решении большого числа раз детерминированных краевых задач при заданных конкретных реализациях случайных функций и параметров в определяющих реологических уравнениях. Здесь на первый план выходят проблемы вычислительной погрешности, поскольку увеличения числа реализаций не всегда приводит к улучшению результатов.

Проиллюстрировано применение метода Монте-Карло к оценке показателей надежности типовых элементов конструкций из стохастически неоднородных элементов конструкций (стержневые конструкции, толстостенная труба) в условиях ползучести, математические модели которых сводятся к стохастическим краевым задачам. Выполнен сравнительный анализ стохастических полей напряжений, деформаций и времени до разрушения элементов конструкций непосредственно на основе экспериментальных данных и по методу Монте-Карло. Наблюдается соответствие расчетных и экспериментальных данных.

Методы решения краевых задач восстановления и релаксации остаточных напряжений

В. П. Радченко

Самарский государственный технический университет, Россия

radch@pm.samgtu.ru

М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет, Россия

msaushkin@gmail.com

Рассматриваются методы решения следующих двух краевых задач, которые возникают в механике остаточных напряжений: восстановление полей остаточных напряжений (ОН) и остаточных пластических деформаций (ОПД) в упрочнённом слое элемента конструкции по экспериментальным

данным; расчёт кинетики (релаксации) ОН в упрочнённом слое конструкции, находящейся в нагруженном состоянии (кинематические или силовые условия нагружения), при ползучести.

Первая задача сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно рассматривать как краевую задачу определения ОН $\sigma_{ij}^{ост}$ при заданных ОПД q_{ij} . Решение данной задачи, если оно существует, единственно и ищется в классе непрерывных функций, имеющих почти всюду производную второго порядка по пространственным координатам. Данную задачу можно решить лишь для простейших конструктивных элементов, например для цилиндра.

На практике для сложных элементов конструкций определяется экспериментально лишь одна компонента тензора остаточных напряжений, а остальные компоненты необходимо доопределить (задача восстановления ОН), решая при этом обратную краевую задачу — задачу определения ОПД q_{ij} по известным ОН $\sigma_{ij}^{ост}$. Данная задача при заданных ОН может иметь бесконечное число решений (кинематически допустимых деформаций). Для получения единственного решения в работе вводится дополнительная гипотеза на вид тензора пластических деформаций q_{ij} : $\delta_{ij}q_{ij} = 0$, где δ_{ij} — феноменологические параметры.

Решение задачи о восстановлении ОН используется как начальное условие для второй рассматриваемой задачи (релаксации ОН в упрочнённом слое конструкции), которая непосредственно может быть решена опять же только для простейших конструктивных элементов. Для сложных элементов конструкций предлагается использовать метод, основанный на декомпозиции конструкции на тонкий упрочнённый слой и «тело». В силу этого метода расчёт релаксации остаточных напряжений в поверхностном слое сводится к «склеиванию» решений следующих двух краевых задач: определение напряжённо-деформированного состояния всей конструкции при ползучести без учёта поверхностного упрочненного слоя; расчёт релаксации ОН в режиме «жесткого» нагружения.

Первая краевая задача декомпозиции решается классическими методами с использованием численных методов дискретизации конструкции (метод конечных элементов или метод сеток) шагами по времени.

Для решения второй задачи декомпозиции поверхностный слой считается единым целым с конструкцией, деформирующимся с ней в режиме «жесткого» нагружения, то есть при заданных значениях компонент тензоров деформаций, которые определяются из решения предыдущей задачи.

Методом декомпозиции и непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений решена задача релаксации ОН в поверхностно упрочненном слое для простейших элементов конструкций: растягиваемого осевой силой цилиндрического изделия и упрочнённой толстостенной трубы, находящейся под внутренним давлением; проводится сравнение полученных

решений.

С помощью декомпозиции решена задача релаксации остаточных напряжений в упрочнённом концентраторе (в виде кругового отверстия) диска газотурбинного двигателя и лопатки, работающих в реальных условиях эксплуатации. Приводятся результаты расчетов, выполнен их анализ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00478-а).

p -Адические сплайны

А. Я. Радыно

Белорусский государственный университет, Беларусь

alesr@tut.by

Пусть p — простое число, \mathbb{Q}_p — множество рациональных чисел. Тогда $\forall \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \exists ! \gamma \in \mathbb{Z}_p : \frac{m}{n} = p^\gamma \frac{m_1}{n_1}$, где $(m_1, n_1) = 1$. Обозначим $|\frac{m}{n}|_p = p^{-\gamma}$. Пополнение \mathbb{Q} по норме $|\cdot|_p$ называется полем p -адических чисел. Замкнутый шар с центром в $a \in \mathbb{Q}_p$ и радиусом p^m , $m \in \mathbb{Z}$ обозначим $B_m(a)$, а единичный шар B_0 . $S_m(a) = B_m(a) \setminus B_{m-1}(a)$. Пусть далее a, m таковы, что $B_m(a) \subset B_0$. Обозначим через I_m характеристическую функцию шара $B_m(a)$.

Определение 1. Функция из $C(B_0; \mathbb{R})$ вида

$$L_{n-m} = \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} \lambda_n(k) |x - k|_p,$$

где $\lambda_n(k) \in \mathbb{R}$ определяются условием $L_{n-m}(i) = I_m(i)$, $i \in \mathbb{Z}/p^{n-m}\mathbb{Z}$ называется p -адическим линейным сплайном, построенном по функции I_m . В работах [1], [2] исследованы аппроксимативные свойства таких сплайнов в $C(B_0; \mathbb{R})$ и показано равенство бесконечности погрешностей приближения в пространстве $C(B_0; \mathbb{Q}_p)$. В работе [3] решена задача приближения характеристической функции шара для конечномерного случая, т.е. в пространстве $C(B_0^n; \mathbb{R})$.

Чтобы задача решалась в пространстве $C(B_0; \mathbb{Q}_p)$ необходимо немного изменить определение сплайна и рассматривать для любого фиксированного $\alpha > 1, \alpha \in \mathbb{N}$

$$L_{n-m}^\alpha = \sum_{k=0}^{p^{n-m}-1} \lambda_n(k) |\cdot - k|_p^{-\alpha},$$

где

$$|x|_p^{-\alpha} = \begin{cases} p^{\alpha m}, & x \in S_m(0) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $|\cdot|_p^{-\alpha} \in C(B_0; \mathbb{Q}_p)$. В работах [4] найдена точная погрешность приближения I_m в зависимости от параметра m и α . В работе [5] вычисляются пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(k) = \Lambda^\alpha(k)$, $k \in \mathbb{N}$, которые и приводят к интегральному представлению

$$I_m(x) = \int_{B_0} \frac{\Lambda^\alpha(t) dt}{|x-t|_p^\alpha},$$

в смысле интеграла Волкенборна. Следует отметить, что можно рассматривать также и $\alpha \in \mathbb{Q}$. При этом изменится множество значений функции $|x|_p^{-\alpha}$, оно будет $p^{\alpha\mathbb{Z}}$, 0. Поэтому, приближения нужно рассматривать в пространстве $C(B_0; \mathbb{K}_\alpha)$, где \mathbb{K}_α — минимальное поле, содержащее \mathbb{Q}_p и p^α .

Список литературы

- [1] A. Khrennikov, A. Radyna, p -Adic Interpolation and Approximation of a Continuous Function by Linear Combinations of Shifts of p -Adic Valuations // Journal of Approximation Theory. – 2003. – № 120. – P. 124–135.
- [2] Радына А., Інтэрпаліяцыя і набліжэнне p -адычных лінейнымі сплайнамі функцыі класа $C(\mathbb{Z}_p; \mathbb{R})$ // Вестні НАН Беларусі. Сер. Мат. і Фіз. 2004. N 2. с. 21–24.
- [3] A. Radyna m -Adic Multivariate Linear Splines and their Applications to Approximation Theory, Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th Anniversary of Stefan Banach, May 28-31, 2002, Lviv, Ukraine. North-Holland Mathematics Studies 197, Functional Analysis and its Applications. Elsevier, 2004. pp. 257–266.
- [4] Радыно А.Я. Сендер А.Н. P -адические сплайны как аппарат приближения \mathbb{Q}_p -значных функций // Доклады НАН Беларусі. – 2007. – Т. 51, № 2. – С. 21–25.
- [5] Радыно А.Я., Сендер А.Н. Представление характеристической функции шара потенциалом Рисса-Волкенборна // Вестник Гродненского гос. университета им. Я. Купалы. Сер. 2. Естественные науки. – 2007. – № 2(52). – С. 22–28.

Brownian motion on adelic spaces

Ya. M. Radyna

Belarusian State University, Belarus

yauhen.radyna@gmail.com

We consider complex-valued Gaussian stochastic processes on adelic spaces over rational numbers (an obvious generalizations for general case can be made). The most simple one is the Brownian bridge on the quotient space \mathbf{A}/\mathbf{Q} defined by the sum over rationals

$$B(t) = \sum_{k \in \mathbf{Q}^\times} \frac{1 - \chi(kt)}{h(k)} \xi(k).$$

Here χ is a non-trivial character on \mathbf{A}/\mathbf{Q} , $\xi(k)$ are independent standard Gaussian variables, and $h(k)$ is the complexity of a rational number k defined for irreducible $k = a/b$ by $h(k) = ab$. Another way to get $h(k)$ is to consider a product over all rational places

$$h(k) = \prod_v h_v(k), \quad \text{where } h_v(k) = \max\{1, |k|_v\},$$

and $|k|_v$ is the usual v -adic valuation ($v = \infty$ corresponds to standard absolute value).

Than we look at different properties of such processes, such as sample paths' continuity.

Considering such processes allows us to construct positively difinite distributions on adelic spaces on a regular basis.

Задача со смещением для уравнения Геллерстедта

О. А. Репин

Самарский государственный экономический университет, Россия

matstat@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (m = \text{const} > 0, y < 0) \quad (1)$$

в области D , ограниченной характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1) и отрезком $AB = \bar{J} = [0, 1]$ прямой $y = 0$.

Ниже под регулярным решением уравнения (1) в области D будем понимать функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$ такую, что $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах A и B интервала J .

Для уравнения (1) исследуем краевую задачу со смещением.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \tau(x), x \in \bar{J}, \\ A_1(x)(I_{0+}^{a, -a-\beta, \beta-1-a} u[\Theta_0(t)])(x) + \\ + A_2(x)(I_{1-}^{a, -a-\beta, \beta-1-a} u[\Theta_1(t)])(x) &= C(x), x \in J, \end{aligned}$$

где $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $|a| < \beta$ $\tau(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$, $C(x)$ — заданные функции, такие, что

$$\begin{aligned} \tau(x), C(x) &\in H^{\lambda_1}(\bar{J}), 0 < \lambda_1 \leq 1, \\ A_1(0) = A_1(1) = 0, A_1^2(x) + A_2^2(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \bar{J}, \\ A_1(x), A_2(x) &\in H^{\lambda_2}(\bar{J}), \lambda_2 > 1 - \beta + a. \end{aligned}$$

$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования [1], (см. также [2, с. 326-327]).

Будем искать решение поставленной задачи в классе функций $u(x, y)$ таких, что

$$\lim_{y \rightarrow 0-0} u_y(x, y) = \nu(x) = \frac{\nu^*(x)}{x^{1-\varepsilon_1}(1-x)^{1-\varepsilon_2}},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\nu^*(x)$ — гельдеровская на отрезке \bar{J} функция.

Однозначная разрешимость исследуемой задачи сводится к вопросу разрешимости обобщенного уравнения Абеля с внешними коэффициентами

$$A_1(x)(I_{0+}^{a+1-\beta} \nu(t))(x) + A_2(x)(I_{1-}^{a+1-\beta} \nu(t))(x) = f(x), \quad (2)$$

где $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha} f)(x)$ — операторы в смысле Римана-Лиувилля,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} \{ \gamma_1 \Gamma(\beta) [A_1(x)(I_{0+}^{a+\beta} \tau(t))(x) + \\ + A_2(x)(I_{1-}^{a+1-\beta} \tau(t))(x)] - C(x) \}. \end{aligned}$$

Используя известные результаты теории интегральных уравнений [2], [3], [4], можно выписать решение обобщенного уравнения Абеля (2) в явном виде.

Литература

[1] *Saigo M.* A certain boundary value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation // *Math. Japan*, 1979. Vol. 24, № 4. — P. 377–385.

[2] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения — Минск, 1987. — 688 с.

[3] *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля в операторах дробного интегрирования // *Дифференц. уравнения*. 1968. Т. IV. № 2. — С. 298-314.

[4] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи — М.: Наука, 1977. — 640 с.

Динамический хаос в обобщенной модели Тависа-Каммингса

Е. В. Рогачева, А. А. Новиков, А. В. Горохов

Самарский государственный университет, Россия

`elena@ssu.samara.ru`

Исследование хаотического поведения квантовых систем является одной из актуальных проблем современной квантовой физики [1], [2]. В настоящей работе рассмотрены особенности проявления динамического хаоса в модели Тависа-Каммингса [3] вне рамок приближения вращающейся волны. Взаимодействие ансамбля двухуровневых атомов с квантованной фотонной модой в резонаторе задается следующим гамильтонианом:

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_0 \mathbf{S}_3^{(j)} + \hbar\omega \left(\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{j=1}^N \left(\hbar g \mathbf{S}_+^{(j)} \mathbf{b} + \hbar g \mathbf{S}_-^{(j)} \mathbf{b}^\dagger + \hbar g \mathbf{S}_+^{(j)} \mathbf{b}^\dagger + \hbar g \mathbf{S}_-^{(j)} \mathbf{b} \right),$$

где $\mathbf{S}_\pm^{(j)}$ и $\mathbf{S}_3^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ – генераторы группы $SU(2)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$\left[\mathbf{S}_3^{(j)}, \mathbf{S}_\pm^{(k)} \right] = \pm \mathbf{S}_\pm^{(k)} \delta_k^j, \quad \left[\mathbf{S}_+^{(j)}, \mathbf{S}_-^{(k)} \right] = 2 \mathbf{S}_3^{(k)} \delta_k^j,$$

описывающие не взаимодействующие атомные подсистемы, \mathbf{b} и \mathbf{b}^\dagger – операторы уничтожения и рождения фотонов соответственно (генераторы группы Гейзенберга-Вейля $W(1)$) подчиняющиеся коммутационному соотношению

$$[\mathbf{b}, \mathbf{b}^\dagger] = \mathbf{I},$$

ω – частота гармонического осциллятора, представляющего фотонную моду, ω_0 – частота перехода между уровнями в атомах (частоты ω и ω_0 близки по величине), g – константа взаимодействия между атомной и полевой модой.

Представляет интерес динамика средних значений операторов. Уравнения для средних значений совпадают с уравнениями Гейзенберга для операторов. Если гамильтониан физической системы обладает линейно реализованной группой динамической симметрии, система уравнений (в силу линейности) является конечной. В рассматриваемом случае система уравнений для операторов бесконечна: появляющиеся в правых частях произведения операторов следует рассматривать как новые независимые переменные. Традиционный подход, позволяющий получить замкнутую систему уравнений, состоит в том, чтобы заменять средние от произведений операторов произведениями средних. Такой подход, в частности, применялся при исследовании других квантовооптических моделей в [4]. Наряду с этой схемой в работе также исследован альтернативный подход, учитывающий возможные корреляции между атомной и фотонной подсистемами.

Полученные системы дифференциальных уравнений решались численно методом Дормана-Принса [5], были изучены условия возникновения и особенности проявления динамического хаоса при взаимодействии нескольких атомов с одной полевой модой.

Список литературы

- [1] Шустер Г.Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир. – 1988. – 240 с.
- [2] Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос: Введение. – М.: Физматлит. – 2004. – 376 с.
- [3] Tavis M., Cummings F.W. Exact Solution for an N -Molecule–Radiation-Field Hamiltonian // Phys. Rev. 1968. – V. 170. – P. 379-384.
- [4] Горохов А.В., Рогачева Е.В., Ширяев А.В. Динамический хаос в некоторых моделях квантовой оптики // Известия Академии Наук, серия физическая. – 1998. – Т. 62. – № 2. – С. 333-338.
- [5] Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. – Berlin: Springer. – 2008. – 528 p.

Математическая модель зубов человека

Р. А. Роцин

Московский филиал Align Technology R&D, Россия

roschin001@crambler.ru

Изучается задача восстановления полной поверхности зуба по видимой части. Предлагается подход, основанный на построении статистической геометрической модели зуба, подборе параметров модели для наилучшего соответствия видимой части, и деформации модели для точного совпадения с видимой частью. Особое внимание уделяется вопросам вычислительной эффективности, сходимости и устойчивости предлагаемых методов.

Равновесная статистическая механика обобщенного квантового осциллятора

Ю. Г. Рудой

Российский университет дружбы народов, Россия

rudikar@mail.ru

Построена равновесная статистическая механика одномерного обобщенного квантового осциллятора (ОКО) с q -деформированным коммутатором $[a, a^*]_q \equiv aa^* - q(N)a^*a = 1$ ($-1 \leq q \leq 1$), где a^* , a — операторы рождения и уничтожения возбуждения ОКО, a^*a — оператор числа этих возбуждений с собственными значениями (числами заполнения) $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Полное число уровней N является естественным физическим параметром, характеризующим ОКО; очевидно, $N_{\min} \leq N < \infty$ ($N_{\min} = 2$). Энергия ОКО описывается гамильтонианом $H_N = E_0(N) + \varepsilon a^*a$ с N эквидистантными уровнями и энергией возбуждения $\varepsilon > 0$ (вообще говоря, зависящей от N); $E_0(N) = (\varepsilon/2)q(N)$ — энергия основного состояния, причем $q(N) = 1 - 2[N_{\min}/N]$. В предельном случае $N = N_{\min} = 2$, когда $q(2) = -1$ и $E_0(2) = -(\varepsilon/2)$, имеем двухуровневый ферми-осциллятор с единичным антикоммутатором $[a, a^*]_{-1} = 1$. В другом предельном случае $N \rightarrow \infty$, когда $q(\infty) = 1$, $E_0(\infty) = +(\varepsilon/2)$, имеем бозе-осциллятор с бесконечным числом уровней и единичным коммутатором $[a, a^*]_{+1} = 1$; существенна связь энергий фермионного и бозонного вакуумов: $E_0(2) = -E_0(\infty)$, или $E_0(2) + E_0(\infty) = 0$.

Для ОКО, находящегося в тепловом равновесии с термостатом при температуре T , на основе подхода Гиббса получены общие выражения для статистической суммы Z , внутренней энергии U , теплоемкости (при постоянном объеме) и энтропии S как функций параметра N и величины $p = \exp(-\beta\varepsilon)$, где $\beta = 1/kT$ (k — постоянная Больцмана). Показано, что общий случай любых конечных значений N («квазифермиевского» осциллятора) качественно отличается от особого (вырожденного) случая бозевского (планковского) осциллятора с бесконечно большим N .

При всех конечных N ОКО обладает ограниченной сверху максимальной энергией $E^{\max}(N) = E_0(N) + \varepsilon(N - 1)$ и все равновесные термодинамические величины определены на всей оси $0 \leq p < \infty$, в том числе при $p > 1$ (т.е. при отрицательных обратных температурах $-\infty < \beta < -0$). Показано, что при $p = 0$ ($\beta \rightarrow \infty$, $T \rightarrow +0$) внутренняя энергия (за вычетом энергии вакуума) имеет минимальное значение $U_N^{\min}(0) = 0$, при $p \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow -\infty$, $T \rightarrow -0$) — максимальное $U_N^{\max}(\infty) = \varepsilon(N - 1)$, а при $p = 1$ ($\beta \pm 0$, $T \rightarrow \pm\infty$) $U_N(1) = 1/2U_N^{\max}$. Теплоемкость обращается в нуль в точках $p = 0$ и 1 , а также при $p \rightarrow \infty$ и всегда имеет два симметричных относительно $p = 1$ максимума (аномалии Шоттки). Энтропия обращается в нуль при $p = 0$ и $p \rightarrow \infty$ и имеет максимум $S_N(1) = k \ln N$ при $p = 1$.

В особом случае $N \rightarrow \infty$ все равновесные термодинамические функции существуют (и монотонно возрастают) лишь в интервале $0 \leq p < 1$ (т.е. только при неотрицательных значениях β и T). Точка $p = 1$ ($\beta = +0$) является особой для величин U_∞ (простой полюс) и S_∞ (логарифмическая расходимость); величина C_∞ имеет в этой точке максимум, равный k (закон Дюлонга–Пти).

Показано, что классический предел $U \approx 1/\beta$ (теорема о равномерном распределении) существует только при $N \rightarrow \infty$ в высокотемпературном случае $\beta\varepsilon \equiv -\ln p \rightarrow +0$ (т.е. при $p \rightarrow 1$ слева). Соответственно, только для бозе-осциллятора имеет смысл введение эффективной (обратной) температуры Планка–Эйнштейна $\beta^*(\beta\varepsilon) = (2/\varepsilon)th(\beta\varepsilon/2)$, для которой (с учетом энергии вакуума) $U_\infty(\beta\varepsilon) = 1/\beta^*$ при всех β . Очевидно, в высокотемпературном пределе ($\beta\varepsilon \gg 1$) $\beta^* \approx \beta$, тогда как в низкотемпературном пределе ($\beta\varepsilon \ll 1$) $\beta^* \approx 2/\varepsilon$, что определяет характеристическую температуру $^* = E_0(\infty)/k$ бозонного вакуума. Что касается любых конечных N , то величина U_N зависит от β^* степенным образом (при $N = 2$ — линейно), так что область квазиклассичности отсутствует.

Рассмотрено использование эффективной температуры β^* для учета квантовых флуктуаций в духе Блоха и Вигнера при вычислении функций распределения и термодинамических величин квантового бозе-осциллятора в термостате. Указано на удобство применения β^* при квантовом обобщении теоремы Найквиста и ФДТ (с учетом спектральных разложений для средних и условий Кубо–Мартина–Швингера), а также уравнений Ланжевена и

Нормальная и аномальная диффузия как задача случайных блужданий. Теория и приложения

Ю. Г. Рудой

Российский университет дружбы народов, Россия

rudikar@mail.ru

Дано описание «нормального» (Гаусса) и «аномального» (Леви–Хинчина) видов диффузии как различных режимов, или фаз, единого явления диффузии. Предложено рассматривать смену указанных режимов как фазовый переход 2-го рода при критических значениях управляющих параметров переходной вероятности.

Изложение полностью основано на методе случайных блужданий (СБ) в сочетании с обобщенной предельной теоремой и интегральным уравнением Башелье–Смолуховского–Чепмена–Колмогорова. Математический аппарат не использует дробных производных и ограничен применением метода ренормализационной группы и функциональных уравнений для анализа характеристических функций и построения пропагаторов диффузии.

Рассмотрена взаимосвязь макро- и микроскопических уровней и способов описания явления диффузии, а также свойства переходной вероятности как при непрерывном, так и дискретном задании. Пропагаторы диффузии, или устойчивые (автомодельные) распределения Гаусса–Леви–Хинчина трактуются как аттракторы обобщенной центральной предельной теоремы; формулируется критерий Гнеденко–Дёблина для области притяжения «узких» и «широких» распределений.

На основе тауберовых теорем дан анализ характеристических функций для указанного класса распределений и получено решение функционального уравнения для них. Дан анализ динамики диффузионных пакетов Гаусса и Леви–Хинчина, а также рассмотрено применение критерия Линдеберга для траекторий.

Дан подробный анализ двух важных частных случаев: случайных блужданий Гаусса–Эйнштейна–Винера и Бернулли–Вейерштрасса–Монтролла. Во втором случае построена аналогия с магнитным фазовым переходом, использующим фрактальную размерность как логарифмический параметр порядка. Рассмотрены также высшие моменты как восприимчивости, для которых имеет место каскад фазовых переходов типа «чертовой лестницы».

Обсуждаются современные приложения явления диффузии в физико-химических системах, дефектных кристаллах и лазерном охлаждении в квантовых ионных ловушках.

Однопетлевые скалярные интегралы в температурной теории поля

Э. Н. Рыкова

Самарский государственный университет, Россия

elza_ily@rambler.ru

В конечнотемпературной квантовой теории поля в формализме мнимого времени диаграммы Фейнмана с бозонными пропагаторами представляются в виде графов, в которых пропагаторы содержат частоты Мацубара, $\omega_n = 2\pi nT$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), T – температура. Применение этих правил приводит к вычислению объектов вида

$$I[m_1, m_2, \dots, m_b] = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \prod_{j=1}^b \frac{(-1)^b}{(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + m_j^2)}, \quad (1)$$

суммирование и интегрирование в которых может быть произведено в любом порядке. Здесь \mathbf{k} – 3-импульс в Евклидовом пространстве. Сначала проводится интегрирование по трехмерному импульсу, а потом – суммирование. Такой подход называют редукцией к трехмерной теории в пределе больших температур (для нулевых частот Мацубара). В рассматриваемом случае при $n \neq 0$ получаем [1]:

$$I[m_1, m_2, \dots, m_b] = 2T (2\pi T)^{3-2b} \frac{(-1)^b \pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{\Gamma(b-3/2)}{\Gamma(b)} S(M, b-3/2), \quad (2)$$

где

$$S(M, b-3/2) = \int \{x\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + M^2)^{b-3/2}}, \quad M^2 \equiv \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^2. \quad (3)$$

При $b > 1$ параметр m^2 является линейной функцией m_j^2 и переменных $\{x\}$ параметризации Фейнмана, по которым в (3) выполняется интегрирование. При целом b , сумма $S(M, b-3/2)$ представляет интеграл от обобщенной дзета-функции Гурвица. Заметим, что для расчета ведущих пороговых поправок к параметрам эффективного потенциала двухдублетной модели $b > 2$, поэтому перенормировка связывает расходимость только при $b = 2$ (последнее – для поправок поля, которые подавлены вершинными факторами [2]).

Первый способ вычисления интегралов заключается в последовательном применении фейнмановской параметризации для упрощения вида импульсной зависимости интеграла, а затем – размерной регуляризации. На

заключительном этапе выполняется суммирование по частотам Мацубара. При этом удобным оказывается выделение в (1) составляющих с нулевой и ненулевыми частотами Мацубара. Вычисления с помощью первого способа очень трудоемки. Можно поступить иначе: сначала в основном случае аналитически представить результат интегрирования от двух пропагаторов в подынтегральном выражении, а затем интегралы с большим количеством пропагаторов получить соответствующим дифференцированием из основного случая. Имея базовые интегралы, легко можно рассчитать вклады частиц в диаграммах Фейнмана в эффективный потенциал. Комбинации пропагаторов зависят от двух или трех массовых параметров в рассматриваемой задаче о поправках скалярных кварков. Оба способа приводят к одинаковым результатам.

В пределе $T \rightarrow 0$ численно получаются значения, совпадающие с такими в полевой теории при нулевой температуре. В пределе высоких температур определяющий вклад дает нулевая бозонная мода, что соответствует хорошо известному заключению о подавлении квантовых эффектов при высоких температурах.

В работе проведены расчеты скалярных интегралов, встречающихся в температурной теории поля при вычислениях с однопетлевыми диаграммами Фейнмана. Интегралы данного типа сводятся к обобщенной дзета-функции Гурвица. Предложен общий подход. В качестве приложения вычисляются аналитически и численно параметры эффективного скалярного потенциала минимальной суперсимметричной модели.

Список литературы

- [1] L. Vergara, Journal of Physics A 30, 6977 (1997); P. Amore, Journal of Physics A 38, 6463-6472 (2005)
- [2] Э.Н. Ахметзянова, М.В. Долгополов, М.Н. Дубинин // ЭЧАЯ. Том 37. Вып.5, 1285 (2006); E.N. Akhmetzyanova, M.V. Dolgoplov, M.N. Dubinin // Phys. Rev. D **71**, 075008 (2005). Э. Н. Ахметзянова, М. В. Долгополов, М. Н. Дубинин, И. А. Смирнов, ЯФ 68, 569 (2005)

Стохастические аспекты вырождения гамильтониана квантовой системы

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт, Россия

fumi2003@mail.ru

Исследуется задача Коши для уравнения Шредингера с вырожденным оператором \mathbf{L} в гильбертовом пространстве H , заданным дифференциальным выражением второго порядка

$$\mathbf{L}u = \frac{\partial}{\partial x}(g(x)\frac{\partial}{\partial x}u) + \frac{i}{2}[a(x)\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u)]$$

с вещественнозначными кусочно постоянными коэффициентами. Причиной некорректности задачи Коши является вырождение оператора \mathbf{L} – обращение в нуль неотрицательного коэффициента $g(x)$ на некотором множестве.

Рассматривается последовательность L_ε , $\varepsilon \in E = (0, 1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, регуляризованных самосопряженных операторов с коэффициентом $g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon$, аппроксимирующих вырожденный оператор L , и соответствующая последовательность $T_\varepsilon(t)$, $t > 0$, $\varepsilon \in E$, $\varepsilon \rightarrow 0$, регуляризованных полугрупп преобразований банахова пространства $X = B^*(H)$ линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $X_* = B(H)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , действующих по правилу

$$(T_\varepsilon(t)\rho, \mathbf{A}) = (\rho, e^{-i\mathbf{L}_\varepsilon t} \mathbf{A} (e^{-i\mathbf{L}_\varepsilon t})^*), \quad (t, \rho, \mathbf{A}) \in R \times X \times X_*.$$

Теорема 1. Пусть индексы дефекта (n_-, n_+) оператора \mathbf{L} конечны, множество операторов \mathbf{L}_θ , $\theta \in \Theta$, есть семейство максимальных симметрических расширений оператора \mathbf{L} .

Если $n_+ \leq n_-$, то множество частичных пределов последовательности $\{T_\varepsilon(t)\}$ в *-слабой операторной топологии пространства $B(X)$ есть подмножество множества полугрупп $T^\theta(t)$, $\theta \in \Theta$, действующих по правилу

$$(T^\theta(t)\rho, \mathbf{A}) = (\rho, e^{-i\mathbf{L}_\theta t} \mathbf{A} e^{i\mathbf{L}_\theta t}), \quad (t, \rho, \mathbf{A}) \in R_+ \times X \times X_*.$$

Если $n_+ > n_-$, то множество частичных пределов последовательности $\{T_\varepsilon(t)\}$ пусто.

Изучается структура множества частичных пределов числовых последовательностей $(T_{\varepsilon_k}(t)\rho, \mathbf{A})$, $(t, \rho, \mathbf{A}) \in R \times X \times X_*$.

На множестве E рассмотрен класс $W(E)$ неотрицательных нормированных конечно аддитивных мер, заданных на алгебре 2^E всех подмножеств множества E и сосредоточенных в произвольной окрестности предельной точки $\varepsilon_0 = 0$ (см. [1]). Последовательность $\{T_\varepsilon(t)\}$ рассматривается

как случайный процесс на вероятностном пространстве $(E, 2^E, \mu)$ с мерой $\mu \in W(E)$, математическое ожидание $T^\mu(t)$ которого определяется как интеграл Петтиса ([2]) оператор-функции $T_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in E$ по мере μ в *-слабой операторной топологии, т.е. для любых $\rho \in X$, $\mathbf{A} \in X_*$ оператор $T^\mu(t)$ удовлетворяет равенству $(T^\mu(t)\rho, \mathbf{A}) = \int_E (T_{\varepsilon_k}(t)\rho, \mathbf{A}) d\mu$ (последний интеграл от ограниченной числовой функции по мере μ есть интеграл Радона, см. [3]).

Теорема 2. Пусть \mathbf{L} есть симметрический оператор в H такой, что $n_+ > n_-$, \mathbf{L}_ε , $\varepsilon \in E$ – его регуляризация. Тогда

1. для любого $t > 0$ найдется такой элемент $\rho \in X$ что для любой бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ существует оператор $\mathbf{A} \in X_*$, что числовая последовательность $\{(T_{\varepsilon_k}(t)\rho, \mathbf{A})\}$ расходится;
2. множество частичных пределов последовательности $(T_\varepsilon(t)\rho, \mathbf{A})$ совпадает с множеством $\bigcup_{\mu \in W(E)} (T^\mu(t)\rho, \mathbf{A})$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Если мера μ принадлежит классу $W(E)$, то математическое ожидание $T^\mu(t)$ случайного процесса $T_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in E$, обладает следующим свойством:

- 1) семейство преобразований $T^\mu(t)$, $t > 0$, пространства X непрерывно в *-слабой операторной топологии пространства $B(X)$;
- 2) для любой точки $(t, \rho, \mathbf{A}) \in R_+ \times X \times X_*$ найдется такая бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\varepsilon_k}(t)\rho, \mathbf{A}) = (T^\mu(t)\rho, \mathbf{A})$.

[1] Сакбаев В.Ж. О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шредингера с вырождением // Журнал Выч. Мат. и Матем. Физ. – 2006. – т.46, N4 – С.682–698.

[2] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.

[3] Варадарайн В.С. Меры на топологических пространствах // Матем. Сборник. – 1961. – 55(97), N 1 – С.35-100.

Осреднение некоторых гидродинамических задач с малой вязкостью

Г. В. Сандраков

Киевский национальный университет им. Т. Г. Шевченко, Украина
sandrako@mail.ru

С. Б. Бойко

Таврический государственный агротехнологический университет,
Украина
lanamelit@mail.ru

Будут приведены утверждения об асимптотическом поведении решений некоторых нестационарных систем уравнений гидродинамики с малым коэффициентом вязкости и быстро осциллирующими по пространственным переменным данными. Такие утверждения доказаны для линейаризованной системы уравнений гидродинамики и систем уравнений Стокса и Навье-Стокса. В качестве примера приведем точную формулировку одного из таких утверждений для решений системы уравнений Навье-Стокса.

Пусть ε и ν являются малыми положительными параметрами. Определим (u, p) как решение (в смысле Лэре-Хопфа) следующей начально-краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} u'_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= F_\varepsilon \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{1}$$

где $F_\varepsilon = F(t, x, x/\varepsilon)$, $F(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; L_{per}^\infty(Y)/\mathbb{R})^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ является ограниченной областью с гладкой границей, T является фиксированным и положительным и $2 \leq n \leq 4$. Здесь индекс *per* означает 1-периодичность относительно $y \in \mathbb{R}^n$ и $Y = [0, 1]^n$ является ячейкой периодичности. Таким образом, по определению $F(t, x, y)$ является 1-периодической по y ,

$$\int_Y F(t, x, y) dy = 0 \quad \text{для п. в. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega$$

и ограничение $F(t, x, y)$ на Y является элементом пространства $L^2(0, T; L^2(\Omega; L^\infty(Y))^n)$.

Теорема. Пусть $\nabla_x F \in L^1(0, T; L^2(\Omega; L_{\text{per}}^\infty(Y)/R)^{n \times n})$ и (u, p) является решением задачи (1). Тогда, найдутся такие положительные постоянные ε_0 и ν_0 , что

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^n)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^{n \times n})}^2 \leq C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \nu^{-1}),$$

и

$$\|p\|_{W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)/R)} \leq C(\varepsilon + \varepsilon^2 \nu^{-1-n/4}),$$

где C является константой, независимой от малых параметров ε и ν при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $0 < \nu \leq \nu_0$.

Первая оценка этой теоремы является актуальной, например, если $\varepsilon^2 \nu^{-1} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (в этом условии предполагается, что положительная величина $\nu = \nu(\varepsilon)$ является функцией от параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$). При выполнении этого условия (например, для $\nu = \varepsilon^{2-\alpha}$ с положительным α) "слабые" решения задачи (1) являются асимптотически малыми при малых ε . С другой стороны, асимптотика решений задачи (1) может содержать быстро осциллирующее слагаемое, если величина $\varepsilon^2 \nu^{-1}$ стремится к положительной постоянной при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для доказательства этой теоремы и утверждений об асимптотическом поведении решений рассматриваемых задач гидродинамики используются методы теории осреднения, представленные в работах [1] и [2].

Литература

[1] Сандраков Г. В. *Влияние вязкости на осцилляции в некоторых линеаризованных задачах гидродинамики* // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71. № 1. С. 101-154.

[2] Сандраков Г. В. *О некоторых свойствах решений системы уравнений Навье-Стокса с осциллирующими данными* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2008. В. 26. С. 309-322.

Соотношения для определения матричных коэффициентов дискретного периодического оптимального регулятора по выходу

Н. А. Сафарова

Институт прикладной математики, Бакинский государственный университет, Азербайджан
narchis2003@yahoo.com

В настоящей работе приводятся новые аналитические формулы (аналогично методу Levine-Athans для стационарного случая) определения матриц цепи обратной связи для решения задач дискретной периодической оптимальной системы стабилизации по выходу, с помощью которых возможно уточнение коэффициентов соответствующего регулятора. Результаты иллюстрируются конкретным примером.

Аппроксимация типа Мюнса-Саса и нули функций из класса Бергмана в полуплоскости

А. М. Седлецкий

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия
sedlet@mail.ru

Условия существования сильного решения для уравнения Навье-Стокса с периодическими краевыми условиями

Е. Н. Сейткулов

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Казахстан
erj@mail.ru

Рассматривается эволюционное уравнение Навье-Стокса с периодическими краевыми условиями. Основной результат состоит в доказательстве существования сильного решения в целом данной системы уравнений при условии, что другая система уравнений (связанная с исходным уравнением) имеет только нулевое решение.

Краевые задачи о распространении волн в анизотропной неоднородной среде

А. Ю. Сеницкий

Самарский государственный университет путей сообщения, Россия

y-abc@mail.ru

В области $\Omega : \{t > 0, \quad 1 < r < a\}$ рассмотрим следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + A(r) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + B(r)u(r, t) - C(r) \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Здесь $u(r, t)$ - радиальная компонента вектора перемещений. Переменные коэффициенты $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$ связаны определенными соотношениями с упругими характеристиками и плотностью неоднородной среды. В дальнейшем будем считать, что $C(r) = k^2 = const$, что соответствует постоянной скорости распространения упругих волн в анизотропной среде.

Приведем один из вариантов замкнутого решения уравнения (1). В характеристических координатах $\begin{cases} \xi = t + kr \\ \eta = t - kr \end{cases}$ оно имеет следующий вид:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{4}A\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)u_{\xi} + \frac{1}{4}A\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)u_{\eta} - \frac{1}{4}B\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)u = 0 \quad (2)$$

Полагая $a(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)$, $b(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)$, $c(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}B\left(\frac{\xi - \eta}{2}\right)$. Тогда уравнение (2) можно записать [1] в символическом виде:

$$(D_{\xi} + b)(D_{\eta} + a)u = hu, \quad (3)$$

где $D_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}$, $D_{\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}$, $h = ab + a\xi - c$ - инвариант Лапласа. В случае, когда $h = 0$ (т.е. $B(r) = \frac{1}{4} [2A'(r) + A^2(r)]$) уравнение (2), а следовательно, и (1) интегрируется в квадратах:

$$u(r, t) = e^{-\frac{1}{2} \int A(r) dr} [f_1(t + kr) + f_2(t - kr)] \quad (4)$$

где f_1 , f_2 произвольные функции класса $c^2(\Omega)$.

Физический смысл полученного решения заключается в том, что выражение в квадратных скобках представляет линейную комбинацию обратной и прямой волны. Отметим, что в работе [2] приводятся другие случаи интегрируемости уравнения (1). Далее, используя решение (4), с учетом, что при $t = 0$ среда находилась в покое ($u(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$) исследуется два важных с практической точки зрения случая распространения волн напряжений в бесконечной анизотропной неоднородной среде, соответствующие действию на границе цилиндрической (сферической) полости скачка давления или радиального перемещения.

Литература

1. Малышев Ю.В. Каскадный метод и факторизация. // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр 13 межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 2003. С. 120-123
2. Сеницкий А.Ю. Об интегрируемости волнового уравнения с переменными коэффициентами. // Изд. Высших учебных заведений. Математика. 1998 № 7. С. 39-46.

Квантование универсального пространства Тейхмюллера

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия

`sergeev@mi.ras.ru`

Альфурсом и Берсом, играет ключевую роль в теории квазиконформных отображений и римановых поверхностях. Его можно определить как фактор пространства квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 (т.е. гомеоморфизмов S^1 , продолжающихся до квазиконформных отображений круга Δ) по модулю преобразований Мебиуса (т.е. дробно-линейных автоморфизмов Δ). Пространство \mathcal{T} обладает естественной кэлеровой структурой и может быть реализовано в виде открытого подмножества в комплексном банаховом пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ . Универсальное пространство Тейхмюллера \mathcal{T} содержит все классические пространства Тейхмюллера, ассоциированные с компактными римановыми поверхностями конечного рода. Они вкладываются в \mathcal{T} в виде комплексных подмногообразий. С другой стороны, однородное пространство $\mathcal{S} := \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$, являющееся фактором группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$ по модулю преобразований Мебиуса, можно рассматривать как "гладкую" часть \mathcal{T} .

Пространство \mathcal{S} можно проквантовать, воспользовавшись его вложением в зигелев диск Гильберта–Шмидта \mathcal{D}_{HS} . При таком вложении группа диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ реализуется в виде подгруппы симплектической группы Гильберта–Шмидта, действующей на зигелевом диске посредством операторных дробно-линейных преобразований. Мы строим голоморфное фоковское расслоение над диском Зигеля \mathcal{D}_{HS} , наделенное проективным действием симплектической группы Гильберта–Шмидта, покрывающим ее действие на \mathcal{D}_{HS} . Инфинитезимальная версия указанного действия дает проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта в слое F_0 фоковского расслоения в начале. Эту конструкцию можно рассматривать как геометрическое квантование диска Зигеля \mathcal{D}_{HS} . Ее

сужение на \mathcal{S} дает проективное представление алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ группы $\text{Diff}_+(S^1)$ в фокковском пространстве F_0 , т.е. геометрическое квантование пространства \mathcal{S} . Однако, описанная процедура квантования не применима ко всему универсальному пространству Тейхмюллера \mathcal{T} . Указанное пространство удается проквантовать, пользуясь "квантовым исчислением" Конна–Сулливана. Идея этого подхода состоит в том, чтобы построить представление π ассоциативной алгебры наблюдаемых в гильбертовом пространстве H , сопоставляющее дифференциалу df наблюдаемой f коммутатор $[S, \pi(f)]$ образа квантовой наблюдаемой $\pi(f)$ с самосопряженным оператором симметрии S , определяемым поляризацией H .

Марковская и немарковская динамика неравновесного теплового «перепутывания»

И. Е. Синайский

Школа физики, Университет КваЗулу-Наталь, ЮАР

ilsinay@gmail.com

Ф. Петруччионе

Школа физики, Университет КваЗулу-Наталь, ЮАР

petruccione@ukzn.ac.za

Хорошо известно, что для описания реалистичных физических систем необходимо учитывать влияние диссипативного окружения [1]. В большинстве случаев взаимодействие с диссипативным окружением разрушает квантовые корреляции в системе, однако известно, что в некоторых ситуациях окружение может создавать «перепутывание» [2]. В данной работе изучена динамика модели, предложенной Л. Куирога (L. Quiroga) в [3]. Изучаемая модель состоит из простейшей спиновой цепочки – 2 спина, каждый из которых находится в контакте с собственной тепловой «баней». В таком неравновесном случае изучены только стационарные решения, в которые система переходит при бесконечно большом времени релаксации [3, 4, 5].

Гамильтониан системы имеет вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{B1} + \hat{H}_{B2} + \hat{H}_{SB1} + \hat{H}_{SB2},$$

где \hat{H}_S – гамильтониан, описывающий взаимодействие между спинами, \hat{H}_{Bj} ($j = 1, 2$) – гамильтониан фотонных «бань», \hat{H}_{SBj} – гамильтониан взаимодействия спинов с «банями» в ПВВ.

При получении кинетического уравнения для редуцированной матрицы плотности использовано приближение необратимости. Статистический оператор всей системы в любой момент времени может быть записан в виде произведения редуцированной матрицы плотности в изучаемый момент времени и матриц плотности каждой из «бань» в начальный момент времени:

$$\hat{\alpha}(t) = \hat{\rho}(t)\hat{B}_1(0)\hat{B}_2(0).$$

В работе рассмотрены решения двух кинетических уравнений, первое уравнение – кинетическое уравнение в приближении Маркова-Борна, второе – более общее постмарковское кинетическое уравнение, учитывающее эффекты памяти фотонных «бань».

Кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности в приближении Маркова-Борна имеет вид [6]:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_1(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_2(\hat{\rho})$$

где

$$\mathcal{L}_j(\hat{\rho}) \equiv \sum_{\mu, \nu} J_{\mu, \nu}^{(j)}(\omega_{j, \nu}) \{ [\hat{V}_{j, \mu}, [\hat{V}_{j, \nu}^\dagger, \hat{\rho}]] - (1 - e^{\beta_j \omega_{j, \nu}}) [\hat{V}_{j, \mu}, \hat{V}_{j, \nu}^\dagger \hat{\rho}] \}.$$

Постмарковское уравнение имеет вид [7]

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + L_1(\hat{\rho}) + L_2(\hat{\rho}),$$

где

$$L_j(\hat{\rho}) = \mathcal{L}_j \int_0^t dt' k(t') \exp(t' \mathcal{L}_j) \rho(t - t')$$

На основе полученных аналитических решений кинетических уравнений исследована динамика квантовых корреляций в системе.

Часть доклада посвященная решению кинетического уравнения в приближении Маркова-Борна опубликована в [8].

Список литературы

- [1] Breuer H.-P., Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2002).
- [2] Amico L., Fazio R., Osterloh A., Vedral V. // *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
- [3] Quiroga L., Rodriguez F.J., Ramirez M.E., Paris R. // *Phys. Rev.* **A75**, 032308 (2007).

- [4] Mejia-Monasterio C., Wichterich H. // Eur. Phys. J. Spec. Top. **151**, 113 (2007).
- [5] Burgarth D., Giovannetti V. // Phys. Rev. A **76**, 062307 (2007).
- [6] Goldman M. // J.Magn.Reson. **149**, 160 (2001).
- [7] Shibani A., Lidar D.A. // Phys. Rev. A **71**, 020101(R) (2001).
- [8] Sinaysky I., Petruccione F., Burgarth D.// arXiv:0807.0379v1 [quant-ph].

Markovian and Non-Markovian dynamics of nonequilibrium thermal entanglement

I. Sinaysky

University of KwaZulu-Natal, South Africa
Quantum Research Group, School of Physics
ilsinay@gmail.com

F. Petruccione

University of KwaZulu-Natal, South Africa
Quantum Research Group, School of Physics
petruccione@ukzn.ac.za

In describing real physical systems one should always take into account the influence of the surroundings. The study of open systems is particularly important for understanding processes in quantum physics [1]. Whereas in most cases the interaction with an environment destroys quantum correlations within the system, it is well known that in some situations it can also build up entanglement and in principle even prepare complex entangled states [2]. In order to understand the role of the various parameters that compete in this setup, it is useful to find exactly solvable models. Here we study the dynamics of a model that was recently introduced by L. Quiroga [3]. It consists of a simple spin chain in contact with two reservoirs at different temperatures. In such a non-equilibrium case most studies are restricted to the steady-state solutions to which the system converges in the limit of long times [3, 4, 5].

We consider the simplest spin chain consisting of two spins, with each spin coupled to a separate bosonic bath. The total Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{B1} + \hat{H}_{B2} + \hat{H}_{SB1} + \hat{H}_{SB2},$$

where \hat{H}_S is the Hamiltonian describing spin-to-spin interactions, \hat{H}_{Bj} ($j = 1, 2$) are the operators describing the bosonic reservoirs for each spin, \hat{H}_{SBj} Hamiltonian of spin-bath interaction in RWA.

We study the dynamics of system in the weak coupling limit [1]. The density operator of the whole system $\hat{\alpha}(t)$ can be written as $\hat{\alpha}(t) = \hat{\rho}(t)\hat{B}_1(0)\hat{B}_2(0)$ (irreversibility hypothesis), where each bosonic bath is described by a canonical density matrix and $\hat{\rho}(t)$ denotes the reduced density matrix of the spin chain.

First, we study the dynamics of the system in the Born-Markov approximation. The equation for the evolution of the reduced density matrix [6] is:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_1(\hat{\rho}) + \mathcal{L}_2(\hat{\rho})$$

with dissipators

$$\mathcal{L}_j(\hat{\rho}) \equiv \sum_{\mu, \nu} J_{\mu, \nu}^{(j)}(\omega_{j, \nu}) \{ [\hat{V}_{j, \mu}, [\hat{V}_{j, \nu}^\dagger, \hat{\rho}]] - (1 - e^{\beta_j \omega_{j, \nu}}) [\hat{V}_{j, \mu}, \hat{V}_{j, \nu}^\dagger \hat{\rho}] \}$$

Second, we study the post-Markovian equation [7]

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + L_1(\hat{\rho}) + L_2(\hat{\rho})$$

with time dependent dissipators

$$L_j(\hat{\rho}) = \mathcal{L}_j \int_0^t dt' k(t') \exp(t' \mathcal{L}_j) \rho(t - t')$$

With help of the obtained analytical solution dynamics of entanglement is studied.

The part of the talk concerning to the solution of master equation in the Born-Markov approximation published in [8]

References

- [1] Breuer H.-P., Petruccione F. *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2002).
- [2] Amico L., Fazio R., Osterloh A., Vedral V. // *Rev. Mod. Phys.* **80**, 517 (2008).
- [3] Quiroga L., Rodriguez F.J., Ramirez M.E., Paris R. // *Phys. Rev.* **A75**, 032308 (2007).

- [4] Mejia-Monasterio C., Wichterich H. // Eur. Phys. J. Spec. Top. **151**, 113 (2007).
- [5] Burgarth D., Giovannetti V. // Phys. Rev. A **76**, 062307 (2007).
- [6] Goldman M. // J.Magn.Reson. **149**, 160 (2001).
- [7] Shibani A., Lidar D.A. // Phys. Rev. A **71**, 020101(R) (2001).
- [8] Sinaysky I., Petruccione F., Burgarth D.// arXiv:0807.0379v1 [quant-ph].

Стохастическая формула Бейкера–Хаусдорфа

А. М. Синев

*Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, Россия
sansin@mail.ru*

Мы рассматриваем линейное стохастическое дифференциальное уравнение Ито с операторными коэффициентами

$$du_t = (c_t + a_t A + b_t B)u_t dW_t, \quad u_0 = I. \quad (1)$$

Здесь W_t — n -мерный винеровский процесс с независимыми стандартными компонентами, a_t, b_t, c_t — заданные n -мерные непрерывные комплексные функции времени, A и B — операторы с коммутатором $[B, A] = I$. Справедливо утверждение [1]:

Теорема 1. Пусть μ_t — решение системы уравнений Риккати

$$\mu_t + b_t \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau = a_t, \quad (2)$$

на отрезке $[0, T]$. Тогда решение уравнения (1) в нормальной форме (А действует после В) имеет вид

$$u_t = e^{\int_0^t (c_\tau + b_\tau z_\tau) dW_\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (c_\tau + b_\tau z_\tau)^2 d\tau} \times e^{A z_t - \frac{A^2}{2} \int_0^t \mu_\tau^2 d\tau} e^{-AB \int_0^t b_\tau \mu_\tau d\tau} e^{B x_t - \frac{B^2}{2} \int_0^t \eta_\tau^2 d\tau}, \quad (3)$$

где $\eta_t = b_t e^{-\int_0^t b_\tau \mu_\tau d\tau}$, и z_t, x_t — диффузионные процессы, удовлетворяющие системе линейных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} dz_t &= -(c_t + b_t z_t)\mu_t dt + \mu_t dW_t, & z_0 &= 0, \\ dx_t &= -(c_t + b_t z_t)\eta_t dt + \eta_t dW_t, & x_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Математическое ожидание $\rho_t = \mathbb{E} u_t \rho_0 u_t^*$ используется для расчета эволюции состояния ρ_t открытой квантовой системы, которая описывается уравнением Линдблада

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}^\dagger(\rho_t), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (5)$$

с квадратичным относительно системных операторов отображением \mathcal{L}^\dagger , где ρ_0 — положительный оператор с единичным следом, задающий начальное состояние квантовой системы.

В качестве примера рассматривается эволюция когерентного электромагнитного излучения моды ω , заключенного между подвижным и закрепленным зеркалами. Данная полость является частью интерферометра, измеряющего слабую классическую силу, действующую на подвижное зеркало (квантовый осциллятор частоты Ω , спонтанно обменивающийся энергией через подвес с окружением при ненулевой температуре). Состояние системы «излучение \otimes осциллятор» удовлетворяет уравнению [2], [3]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & i [\rho, \omega a^\dagger a \otimes I + I \otimes \Omega b^\dagger b + (g a^\dagger a + f_t) \otimes (b^\dagger + b)] \\ & + \frac{\lambda(\nu + 1)}{2} (2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b) + \frac{\lambda\nu}{2} (2b^\dagger \rho b - b b^\dagger \rho - \rho b b^\dagger), \quad (6) \end{aligned}$$

где a и b — операторы уничтожения в пространстве состояний излучения и осциллятора соответственно, g — константа связи, f_t — классическая сила, действующая на осциллятор, $\lambda > 0$ характеризует интенсивность обмена энергией между осциллятором и термостатом, а $\nu > 0$ выражается через его температуру T : $\frac{\hbar\Omega}{kT} = \ln \frac{\nu+1}{\nu}$. Чтобы $\rho_t = \mathbb{E} u_t \rho_0 u_t^*$, оператор эволюции системы u_t должен удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} du_t = & \left[-\frac{\lambda(\nu + 1)}{2} b^\dagger b dt - \frac{\lambda\nu}{2} b b^\dagger dt + \sqrt{\lambda(\nu + 1)} b dX_t + \sqrt{\lambda\nu} b^\dagger dY_t \right. \\ & \left. - i\omega a^\dagger a dt - i\Omega b^\dagger b dt - i(g a^\dagger a + f_t)(b^\dagger + b) dt \right] u_t, \quad (7) \end{aligned}$$

с двумерным процессом $W_t = (X_t, Y_t)$, которое соответствующей заменой приводится к уравнению типа (1), где $A = b^\dagger$, $B = b$.

Теорема 1 позволяет вычислить среднее значение, дисперсию и отношение сигнал/шум наблюдаемой $\hat{I} = a_1^\dagger \otimes a_2 + a_1 \otimes a_2^\dagger$ для произведения систем, описываемых уравнением (6).

Литература[1] А. М. Синева, Матем. Заметки, **84**, №3 (2008).

[2] А. М. Chebotarev, *Lectures on Quantum Probability*, México: Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas. V. 14, 2000.

[3] С. W. Gardiner, P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer, 2004.

Об одном обобщении операторов Харди методами теории операторов преобразования

С. М. Ситник

Воронежский институт МВД, Россия

pochtaname@gmail.com

Методы теории операторов преобразования широко применяются в современной теории уравнений в частных производных [1]. Вместе с тем в нескольких недавних работах найдены простые доказательства того факта, что сдвинутые операторы Харди [2–3] являются унитарными в пространстве $L_2(0, \infty)$

$$H_1 f = f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, H_2 f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy. \quad (1)$$

На самом деле это частный случай унитарности более общих операторов преобразования со специальными функциями в ядрах, полученных ранее автором [4–5] в поисках унитарных обобщений известных операторов Сонина и Пуассона. Таким образом, можно сделать вывод, что введённые автором в [4–5] операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных типов являются полезными обобщениями классических операторов Харди.

Определение 1. Введём операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$S_1 f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, S_2 f = \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (2)$$

$$P_1 f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \frac{df(t)}{dt} dt, P_2 f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \left(-\frac{df(t)}{dt} \right) dt, \quad (3)$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ —функция Лежандра.

Теорема 1. Для унитарности в $L_2(0, \infty)$ операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости (2–3) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым.

При значениях $\nu = 1, 2, 3$ получается

Следствие. Следующие операторы унитарны в $L_2(0, \infty)$, их спектр совпадает с единичной окружностью:

$$\begin{aligned}
H_1 f &= f(x) - \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy, \quad H_2 f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y} dy, \\
H_3 f &= f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, \quad H_4 f = f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy, \\
H_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, \quad H_6 f = f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\
H_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, \quad H_8 f = f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\
H_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, \\
H_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Разумеется, приведённый список унитарных операторов простого вида можно легко расширить. В [4–5] автором построены обобщённые операторы Бушмана–Эрдейи, которые являются унитарными уже при всех значениях ν .

Список литературы

- [1] Ситник С. М. Операторы преобразования и их приложения. В книге: "Исследования по современному анализу и математическому моделированию", Владикавказ, 2008.—С. 226–293.
- [2] Opic B., Kufner A. Hardy–Type Inequalities.—Longman, 1990.
- [3] Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E. The Hardy Inequality.—Pilsen, 2007.
- [4] Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости // Препринт института автоматике и процессов управления ДВО РАН.—Владивосток, 1990.—45 С.
- [5] Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи // ДАН СССР.—1991.—т.320.—№6.—С.1326–1330.

Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям

О. Г. Смолянов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия

smolyanov@yandex.ru

Формулой Фейнмана называется представление решения эволюционного уравнения с помощью предела последовательности интегралов по декартовым степеням пространственной области определения решения или ее касательного расслоения. Формулой Фейнмана-Каца называется представление решения того же эволюционного уравнения с помощью интеграла по мере или псевдомере на некотором пространстве функций, принимающих значения в пространстве, декартовы степени которого используются в формуле Фейнмана, и определенных на отрезке $[0, t]$, где t — это тот момент времени, для которого находится значение решения рассматриваемого уравнения (при этом часто пространство функций называется пространством траекторий в соответствующем пространстве). В случае уравнения Шредингера, полученного квантованием классической гамильтоновой системы, в формулах Фейнмана используются декартовы произведения ее конфигурационного или фазового пространства, а в формулах Фейнмана-Каца — интегралы по траекториям в этих пространствах (называемые также интегралами Фейнмана).

Связь между формулами Фейнмана и Фейнмана-Каца состоит в том, что интегралы по мере или псевдомере в формуле Фейнмана-Каца могут быть вычислены (в случае, когда речь идет о мерах) или определены (когда речь идет о псевдомерах) как пределы некоторых последовательностей интегралов по подпространствам пространства траекторий, причем интегралы, содержащиеся в формуле Фейнмана, либо совпадают с интегралами по подпространствам, либо их аппроксимируют. Первый случай реализуется для «простых» уравнений в «простых» пространствах; именно так обстояло дело в самой первой работе Фейнмана (1948), а также в последовавшей за ней работе М.Каца (1949). В этом случае получение формул Фейнмана фактически означает получение формул Фейнмана-Каца; таким образом формула Фейнмана-Каца и была получена — для простейшего уравнения Шредингера — в этой работе Фейнмана (в работе М.Каца формула Фейнмана-Каца была получена — но лишь для уравнения теплопроводности — совсем по-другому). Однако именно во втором случае, реализующемся в более сложных ситуациях, формулы Фейнмана оказываются наиболее полезными, так как они дают явные аппроксимации (содержащие только элементарные функции) для тех величин (в частности, для переходных вероятностей и переходных амплитуд, а также и для самих интегралов Фейнмана), которые через элементарные функции не выражаются.

В докладе формулы Фейнмана получаются с помощью теоремы Чернова (Chernoff, 1968), являющейся обобщением известной теоремы Троттера (которая была одновременно доказана Ю.Л.Далецким). Теорема Чернова используется аналогично тому, как в работе Нельсона (1964) была использована теорема Троттера при получении первого доказательства результатов работы Фейнмана 1948 г. (обсуждаемый в докладе метод позволяет дать и доказательства результатов работы Фейнмана 1951 г.).

Рассматриваются три класса уравнений.

1. Дифференциальные уравнения типа теплопроводности и типа Шредингера на областях римановых многообразий и на бесконечномерных многообразиях, состоящих из функций, принимающих значения в римановых многообразиях и определенных либо на отрезке вещественной прямой, либо на области евклидова пространства. Полученные в этом случае формулы Фейнмана могут содержать геометрические характеристики риманова многообразия, а также его вложения в евклидово пространство. Эти формулы можно использовать для вывода формул Фейнмана-Каца, содержащих интегралы по траекториям в области риманова многообразия или в многообразии функций, принимающих значения в римановом многообразии.

2. Конечномерные и бесконечномерные эволюционные псевдодифференциальные уравнения типа Шредингера относительно функций на линейных пространствах или на многообразиях только что описанных классов. Возникающие при этом формулы Фейнмана можно использовать для доказательства формул Фейнмана-Каца, содержащих интегралы по траекториям в фазовом пространстве соответствующей классической гамильтоновой системы.

3. Уравнения Шредингера, описывающие эволюцию (квази)частиц, масса которых зависит от координаты. При этом рассматриваются случаи непрерывной и разрывной зависимости. Конечно, во втором случае получаемые формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца зависят от того, какое самосопряженное расширение формального гамильтониана выбирается.

Развитые методы применимы и к уравнениям относительно функций, определенных на пространствах над полем p -адических чисел.

Некоторые из результатов доклада были получены совместно с Х.фон Вайцзеккером (H.von Weizsaecker, Германия), А.Труменом (A.Truman, Великобритания) и М.Гадельей (M.Gadella, Испания).

О разрешимости эллиптических краевых задач в классах непрерывных (негельдеровых) функций

А. П. Солдатов

Белгородский государственный университет, Россия

soldatov48@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ(проект № 07-01-00299)

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ограниченной ляпуновским контуром Γ , эллиптическую систему первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_l)$ и собственные значения постоянной матрицы $J = (J_{ij}) \in \mathbb{C}^{l \times l}$ лежат в верхней полуплоскости. Пусть матрица -функция $G(z)$, $z = x + iy$, задана и удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области \bar{D} и ее определитель $\det G^+$ всюду отличен от нуля на контуре Γ . Эта система впервые была предложена Дуглисом [1] и играет большую роль при исследовании общих эллиптических задач на плоскости [2].

Рассмотрим задачу Римана -Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi^+ = f \quad (2)$$

для решений ϕ системы (1) из класса $\operatorname{Re} G\phi \in C(\bar{D})$.

С каждой точкой $z = x + iy$ плоскости свяжем матрицу $z_J = x1 + yJ$. В этих обозначениях обобщенный интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t-z)_J^{-1} dt_J (G^+)^{-1}(t) \varphi(t), \quad z \in D,$$

с вектор- функцией $\varphi \in C(\Gamma)$ описывает решения (1). Отметим, что если $e(t) \in \mathbb{C}$ означает единичный касательный вектор к контуру Γ в точке t , направленный в соответствии с его ориентацией, то матричный дифференциал $dt_J = [e(t)]_J |dt|$, где $|dt|$ означает элемент длины дуги.

Теорема 1. Для любой вещественной плотности $\varphi \in C(\Gamma)$ функция $\phi = I\varphi$ принадлежит классу $\operatorname{Re} [G\phi \in C(\bar{D})]$ и для ее предельного значения $(\operatorname{Re} G\phi)^+$ на границе справедлива формула

$$2(\operatorname{Re} G\phi)^+ = \varphi + K\varphi, \quad (K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{k(t_0, t)}{t - t_0} \varphi(t) |dt|,$$

где положено

$$k(t_0, t) = \frac{1}{2i} \left[e(t)G^{-1}(t)G(t_0) - \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} \overline{e(t)G^{-1}(t)G(t_0)} \right].$$

Отметим, что функция $k(t_0, t)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\Gamma \times \Gamma$ и обращается в нуль при $t_0 = t$. В частности, оператор K компактен в пространстве $C(\Gamma)$ вещественных функций φ .

Теорема 2. *Существуют такие линейно-независимые вектор-функции $H_i \in C(\bar{D}), 1 \leq i \leq m$, удовлетворяющие (1) в области D , и вещественные вектор-функции $h_i \in C(\bar{\Gamma}), 1 \leq i \leq n$, что любое решение ϕ системы (1) из класса $\text{Re } G\phi \in C(\bar{D})$ единственным образом представимо в виде*

$$\phi = I\varphi + \sum_1^m H_i \xi_i,$$

где вещественная вектор-функция $\varphi \in C(\Gamma)$ подчинена дополнительным условиям

$$\int_{\Gamma} \varphi(t) h_j(t) |dt| = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3)$$

в которых $\varphi(t) h_j(t)$ представляет собой скалярное произведение l -векторов.

При этом

$$m - n = 2\alpha - 1, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi} \arg \det G(t)|_{\Gamma}.$$

Представление (3) теоремы позволяет редуцировать задачу (1), (2) к эквивалентной системе уравнений Фредгольма

$$\varphi + K\varphi + 2 \sum_1^m \text{Re}(GH_i)^+ \xi_i = 2f,$$

относительно пары $(\varphi, \xi) \in C(\Gamma) \times \mathbb{R}^m$, подчиненной условиям (4). В частности, индекс этой задачи равен $-2\alpha + 1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(проект № 07-01-00299)

Литература

1. Douglis, A.A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Comm. Pure Appl. Math.* 6 (1953), 259-289.
2. Солдатов А.П., Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // *Изв. АН СССР"(сер.матем.)* 1991. Т.55, No.5. С.1070-1100.

К вопросу оценки обобщенного коэффициента диффузии

Н. Г. Солдатова

*Московский государственный областной педагогический институт,
Россия*

`solnata@mail.ru`

Проведена оценка коэффициента обобщенного уравнения диффузии в n -мерном пространстве. Значение коэффициента обобщенной диффузии найдено благодаря его представлению в виде тензора и использованию максвелловского закона распределения частиц по скоростям и энергиям.

Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки при протекании через неё жидкости с газовыми пузырьками

Э. С. Соскинд

ОАО «Гипровостокнефть», Россия

`Aleksandr.Dengov@giprovestokneft.ru`

Составляются гидродинамические уравнения движения жидкости с газовыми пузырьками и дифференциальное уравнение движения тонкой цилиндрической оболочки. После линеаризации и решения системы уравнений с помощью волнового уравнения, полученного из записанной системы уравнений, при определённых начальных и граничных условиях, исследование устойчивости оболочки сводится к уравнению Матье. Определяются собственные частоты колебаний газового пузырька и оболочки. Находятся условия возникновения резонансов.

Изгиб трехслойных ортотропных пластин локальными нагрузками

Э. И. Старовойтов, И. И. Протуро

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

edstar@mail.by

Введение

В последнее время значительное распространение в технике и строительстве получили трех-слойные элементы конструкций, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечи-вающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба подобные системы оказываются наиболее рациональными, т. е. близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума ве-совых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Статическое и динами-ческое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в основном в случае изотропных материалов слоев.

Постановка и решение задачи.

Постановка задачи о деформировании прямоугольной трехслойной ортотропной пластины проводится в прямоугольной системе координат x, y, z , связанной со срединной плоскостью за-полнителя. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих сло-ях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатными осями x, y величины $\psi_x(x, y)$ и $\psi_y(x, y)$ соответственно. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Деформации малые. Пластина шарнирно оперта по контуру. На нее действует внешняя рас-пределенная поверхностная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$, $q(x, y)$. Через $w(x, y)$, $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ обозначены прогиб и продольные перемещения средней плоско-сти заполнителя вдоль соответствующих координатных осей.

Система дифференциальных уравнений равновесия следует из приня-тых геометрических гипотез, принципа возможных перемещений Лагранжа и закона Гука для ортотропного тела:

$$a_1 u_{x,yy} + a_2 u_{y,xy} + a_3 u_{x,xx} + a_4 \psi_{x,yy} + a_5 \psi_{y,xy} + a_6 \psi_{x,xx} - \\ - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x = 0;$$

$$a_1 u_{y,xx} + a_9 u_{x,xy} + a_{10} u_{y,yy} + a_4 \psi_{y,xx} + a_{11} \psi_{x,xy} + a_{12} \psi_{y,yy} - \\ - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y = 0;$$

$$a_7 u_{x,xxx} + a_{13} u_{y,yyy} + a_{15} u_{x,xyy} + a_{16} u_{y,xyx} + \\ + a_{17} \psi_{x,xxx} + a_{18} \psi_{y,yyy} + a_{19} \psi_{x,xyy} + a_{20} \psi_{y,xyx} - \\ - a_{21} w_{,xxxx} - a_{22} w_{,yyyy} - a_{23} w_{,xyxy} + q = 0.$$

$$a_6 u_{x,xx} + a_5 u_{y,xy} + a_4 u_{x,yy} + a_{24} \psi_{x,xx} + a_{25} \psi_{y,xy} + a_{30} \psi_{x,yy} - \\ - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x = 0;$$

$$a_{12} u_{y,yy} + a_{11} u_{x,xy} + a_4 u_{y,xx} + a_{28} \psi_{y,yy} + a_{29} \psi_{x,xy} + a_{30} \psi_{y,xx} - \\ - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате. Решение полученной системы уравнений (1) находится в двойных тригонометрических рядах. В случае действия локальной распределенной нагрузки, ее можно представить с помощью функции Хевисайда $H(x)$:

$$q(x, y) = q_0 (H_0(x_2 - x) - H_0(x_1 - x)) \cdot (H_0(y_2 - y) - H_0(y_1 - y)).$$

Если приложены сосредоточенная сила или изгибающий момент, то их можно представить с помощью функций Дирака. Методика получения решения системы (1) останется прежней.

Численные результаты. Числовая апробация полученных аналитических решений при действии указанных локальных нагрузок проведена в поле MathCAD. Результаты представлены в виде сравнительных графиков, отражающих зависимость параметров НДС от геометрических и прочностных характеристик материалов слоев, вида и величины нагрузки.

О геометрии области полностью поврежденного материала у вершины трещины в связанной постановке задачи

Л. В. Степанова

Самарский государственный университет, Россия

lst@ssu.samara.ru

Представлен класс автомодельных решений задач о стационарных трещинах в связанной постановке (в связке ползучесть - поврежденность). В рамках связанной постановки задачи, когда параметр сплошности (поврежденности) входит в определяющие соотношения материала, удастся оценить влияние процесса накопления рассеянных повреждений на напряженно-деформированное состояние вблизи вершины трещины и, с другой стороны, описать влияние эволюции напряжений и деформаций на рост повреждений в окрестности вершины трещины. Установлено, что уравнения связанной задачи о стационарной или растущей трещине в условиях ползучести при использовании степенного закона Бейли – Нортонa теории установившейся ползучести и кинетического уравнения Качанова – Работнова, постулирующего степенной закон накопления повреждений, допускают введение автомодельной переменной и автомодельную формулировку. С помощью разложений компонент тензора напряжений и параметра сплошности в ряды по собственным функциям получены приближенные решения задач о стационарных трещинах (антиплоского сдвига, нормального отрыва и поперечного сдвига) в условиях ползучести (с определяющими соотношениями, построенными на основе степенного закона Бейли – Нортонa теории установившейся ползучести) в связанной постановке. Показано, что у вершины трещины существует область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Определена геометрия этой области для разных значений материальных параметров, входящих в определяющие соотношения материала и кинетическое уравнение. Показано, что, если граничное условие в бесконечно удаленной точке формулировать как условие асимптотического сближения с решением Хатчинсона – Райса – Розенгрена, то границы области полностью поврежденного материала, определяемые посредством двух-, трех- и четырехчленного асимптотических разложений параметра сплошности, существенно различаются по размерам и форме. На основании проведенного асимптотического анализа и полученного численного решения нелинейной задачи на собственные значения установлена новая асимптотика дальнего поля напряжений, определяющая геометрию и приводящая к близким конфигурациям области полностью поврежденного материала, построенным

с помощью двух-, трех- и четырехчленного асимптотических разложений параметра сплошности.

Показано, что проблема определения напряженно-деформированного состояния вблизи кончика дефекта приводит к нелинейной задаче на собственные значения, одно собственное значение которой хорошо известно в нелинейной механике разрушения и соответствует ставшей уже классической задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена. Однако асимптотический анализ уравнений задачи о трещине в связанной постановке указывает на необходимость определения всего спектра собственных значений сформулированной нелинейной задачи на собственные значения, что является предметом отдельного исследования. Для проблемы антиплоского сдвига пространства с полубесконечным разрезом методом возмущений получено точное аналитическое решение нелинейной задачи на собственные значения. Найдена аналитическая зависимость собственного значения как функции от показателя нелинейности материала (показателя степени степенного закона связи между напряжениями и скоростями деформаций) и собственного значения, соответствующего линейной задаче.

Для более сложных с математической точки зрения и важных с практической точки зрения проблем о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига получены численные решения задач на собственные значения и даны асимптотические оценки собственных значений, определенные методом возмущений. Показано, что численное и приближенное решения хорошо согласуются друг с другом (для малых значений показателя нелинейности материала).

Эффективное действие в квантовом обобщении статистической термодинамики

А. Д. Суханов

Объединённый институт ядерных исследований, Россия

ogol@oldi.ru

Квантовая механика на компактных многообразиях и наносистемы

А. С. Трушечкин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

trushechkin@mi.ras.ru

В работе рассматривается квантовая механика на компактном многообразии, в частности, в ограниченной области. Мотивацией для работы послужили современные исследования наносистем и модели газа, предложенной Пуанкаре, которые касаются фундаментальной проблемы необратимости в природе.

Строится аналог прёдингеровских квантовых когерентных состояний (квазикогерентные состояния). Доказано, что, как и для когерентных состояний на прямой, существуют квазикогерентные состояния со сколь угодно малой дисперсией по координате и конечной дисперсией по импульсу, и наоборот.

Получены численные оценки дисперсий: существуют квазикогерентные состояния со среднеквадратическим отклонением координаты 10^{-10} м и среднеквадратическим отклонением импульса 10^{-10} кг*м/с на отрезке длиной 1 м. При длине отрезка, стремящейся к бесконечности, квазикогерентные состояния на отрезке стремятся к обычным когерентным состояниям на прямой.

Осуществлён квазиклассический предельный переход: дисперсии и координаты, и импульса стремятся к нулю при стремящейся к нулю постоянной Планка \hbar . Т.е. волновой пакет стремится к классической частице с хорошо определёнными координатой и импульсом.

Работа выполнена совместно с И.В. Воловичем.

Работа частично поддержана грантами НШ-3224.2008.1, РФФИ 08-01-00727-а.

Quantum mechanics on compact manifolds and nanosystems

A. S. Trushechkin

Steklov Mathematical Institute, Russia

trushechkin@mi.ras.ru

Quantum mechanics on a compact manifold, in particular, on a bounded domain is discussed. The work is motivated by modern investigations of nanosystems and a gas model proposed by Poincaré which is related to the fundamental irreversibility problem.

We construct an analogue of coherent states (quasicoherent states) for the bounded domain. We prove that, as with the coherent states on the line, there are quasicoherent states with arbitrarily small value of the dispersion of the position and a finite dispersion of the momentum, and vice versa.

The numerical estimations are obtained: there are quasicoherent wave packets with the standard deviation of the position of order 10^{-10} m and the standard deviation of the momentum of order 10^{-10} kg*m/sec on the segment with the length of 1 m. As the segment length approaches to infinity, the quasicoherent states on the segment tend to the usual coherent states on the line.

The semiclassical limit is performed: dispersions of both the position and momentum tend to zero, as \hbar tends to zero. So, the wave packet tends to the classical particle with well defined both position and momentum.

The talk is based on a joint work with I.V. Volovich.

Семейство накрытий для системы Керстена-Красильщика

В. В. Трушков

Университет города Переславля, Россия

vladimir@trushkov.pereslavl.ru

Система Керстена-Красильщика

$$\begin{cases} u_t = -u_3 + 6uu_1 - 3vv_3 - 3v_1v_2 + 3u_1v^2 + 6uvv_1, \\ v_t = -v_3 + 3v^2v_1 + 3uv_1 + 3u_1v \end{cases}$$

впервые появилась в статье [2]. Здесь индекс означает порядок производной по x . В этой же статье были получены операторы рекурсии для симметрий и

законов сохранения. В [3] построена пара Лакса для этой системы. Заметим, что при $v = 0$ первое уравнение становится уравнением Кортевега-де Фриза, а при $u = 0$ второе уравнение становится модифицированным уравнением Кортевега-де Фриза.

В настоящей работе были построены одномерные накрытия и с помощью соответствующих преобразований Бэклунда новые интегрируемые системы.

Алгебра Уолквиста-Эстабрука является алгеброй Ли с семью образующими и некоторыми соотношениями, которые здесь не приводятся ввиду громоздкости. Находя ее представления в одномерных векторных полях, находим системы, связанные с исходной преобразованиями Бэклунда.

Аналогом преобразования Миуры является

$$\begin{cases} w_x = v^2 - u + w^2, \\ w_t = vv_2 + 2w(u_1 + vv_1) + v_1^2 + 2w^2 \left(u + \frac{v^2}{2} \right) + v^4 + uv^2 + \\ + u_2 - 2u^2, \end{cases}$$

что приводит к системе

$$\begin{cases} v_t = -v_3 + 12v^2v_1 - 3w_1v_1 - 3w_2v + 3w^2v_1 + 6ww_1v, \\ w_t = -w_3 + 6w^2w_1 + 3vv_2 + 3v_1^2 + 3v^2w_1 + 6vv_1w. \end{cases}$$

Эта система и при $v = 0$, и при $w = 0$, переход в модифицированные уравнения Кортевега-де Фриза.

Кроме того имеются абелевы накрытия

$$\begin{cases} w_x = u + kv, \\ w_t = (2u^3 - u_2 + 3uv^2 + 3vv_1) + k(3u^2v - 3u_1v + 4v^3 - v_2) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} w_x = v, \\ w_t = 3u^2v - 3u_1v + 4v^3 - v_2, \end{cases}$$

которые приводят к системам

$$\begin{cases} v_t = -v_3 + 3v^2v_1 + 3w_1v_1 + 3w_2v - 6kvv_1 \\ w_t = k^3v^3 + 3vv_1 + 3k^2vv_1 + 3v^2w_1 + 2w_1^3 + \\ + kv(v^2 - 3(w_1^2 + w_2)) - w_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = -u_3 + 6uu_1 - 3w_1w_4 - 3w_2w_3 + 3u_1w_1^2 + 6uw_1w_2, \\ w_t = 3u^2w_1 - 3u_1w_1 + 4w_1^3 - w_3, \end{cases}$$

Для новых систем также получены операторы рекурсий для симметрий и пары Лакса, а также одномерные накрытия уже над этими системами.

Список литературы

- [1] Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.
- [2] P. Kersten, J.S. Krasil'shchik. Complete integrability of the coupled KdV-mKdV system. In: T. Morimoto, H. Sato, and K. Yamaguchi, eds., Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations — One Hundred Years After Sophus Lie, Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 37, Math. Soc. of Japan, 2002, 151-171. arXiv:nlin/00100
- [3] A. Karasu (Kalkanli), S.Yu. Sakovich, I. Yurdusen. Integrability of Kersten-Krasil'shchik coupled KdV-mKdV equations: singularity analysis and Lax pair. J. Math. Phys. 44 (2003) 1703-1708. arXiv:nlin/0206046

О разрешимости одной краевой задачи с граничным оператором Адамара-Маршо

Б. Х. Турметов

*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Ясави,
Казахстан*

turmetovbh@mail.ru

Исследуется разрешимость краевой задачи с граничным оператором дробного порядка.

Теплопередача через ограждения при наличии воздухопроницаемости

А. Р. Тухватуллин, Ю. В. Типикин, Е. А. Ведутенко

Тольяттинский военный технический институт, Россия

TAR5ARTUR5@rambler.ru

В современных многоэтажных зданиях из крупноразмерных строительных элементов воздухопроницаемость материалов существенно влияет на тепловой режим, теплотери помещений и на теплопередачу через отдельные ограждения. Влияние воздухопроницаемости на теплопередачу для различных элементов ограждений сказывается по-разному. Для окон, которые

обладают наименьшим сопротивлением фильтрации воздуха, результатом этого влияния будет увеличение теплопотери. Воздухопроницаемость массива и стыков, в основном, сказывается на понижении температуры на их внутренних поверхностях. При фильтрации воздуха температурное поле и теплообмен на поверхностях пористого ограждения заметно изменяются. Происходит это в результате переноса тепла потоком воздуха. Расходы воздуха обычно не велики. Рассмотрим тепловой баланс слоя, расположенного в сечении от наружной поверхности ограждения, через которое проходит инфильтрация наружного воздуха.

$$\frac{d^2q}{dr^2} + c_b j \frac{dq}{dr} = 0$$

где q - тепловой поток; $c_b j$ - тепловая емкость потока воздуха;

Анализ данной формулы показывает, что условия тепловосприятия и теплоотдачи на поверхностях при фильтрации могут быть учтены эквивалентными слоями, как и при отсутствии воздухопроницания. Доказано, что такая замена точно соответствует условиям конвективного теплообмена. Коэффициент конвективного теплообмена при наличии фильтрации может быть достаточно надежно определен по упрощенной формуле:

$$\alpha_f \approx \alpha \pm \frac{c_b j}{2}$$

Наличие кроме конвективного лучистого теплообмена на поверхности может быть учтено в расчете теплопередачи при фильтрации, так же при обычных расчетах, введением суммарного коэффициента теплообмена или применением условной температуры среды. При инфильтрации тепловой поток на внутренней поверхности ограждения оказывается наибольшим. По мере приближения к наружной поверхности тепловой поток уменьшается. Такое явление возникает в результате рекуперации (частичного возврата) тепла на нагрев наружного воздуха, фильтрующегося через ограждение навстречу потоку тепла. Влияние потока фильтрующегося воздуха на трансмиссионный перенос тепла через ограждения удобно характеризовать коэффициентом порового охлаждения, который равен отношению входящего в ограждение потока тепла q_v при наличии фильтрации к тепловому потоку q_0 при его отсутствии:

$$\varepsilon = \frac{q_u}{q_0} = \frac{c_b j e^{c_a j R_0}}{e^{c_a j R_0} - 1} : \frac{1}{R_0} = \frac{z e^x}{e^x - 1}$$

где x - относительный коэффициент фильтрационного теплообмена, характеризующий отношение тепловой емкости потока воздуха ($c_b j$) к коэффициенту теплопередачи ограждения ($K=1/R_0$). При больших расходах инфильтрации воздуха через пористое ограждение потерь тепла практически не будет, так как трансмиссионное тепло почти целиком используется на

нагрев наружного воздуха. В результате оказывается возможным использовать эффект порового нагрева для экономии тепла при вентиляции в помещении. Расход тепла можно заметно сократить, если вместо обычного проветривания с подогревом наружного воздуха применять проветривание через наружное пористое ограждение. При обычной вентиляции расход тепла будет равен сумме потерь тепла через ограждение и затрат тепла на нагрев приточного наружного воздуха. Конструкция окна обычно допускает некоторое воздухопроницание. Через притворы и стыки стекла с переплетом воздух попадает в межстекольное пространство, где нагревается до температуры воздушной прослойки. Через неплотности внутреннего остекления воздух попадает в помещение. Увеличение теплопотерь окна при воздухопроницании происходит в результате нагрева воздуха и за счет снижения температуры внутреннего остекления. В современных многоэтажных зданиях из крупноразмерных строительных элементов воздухопроницаемость материалов существенно влияет на тепловой режим, теплопотери помещений и на теплопередачу через отдельные ограждения. Сейчас ведутся разработки новых методов по решению этих проблем.

Используемая литература: 1. Богословский В.Н., Строительная теплофизика, «АВОК Северо-Запад» Санкт-Петербург, 3-е издание, 2006г.

Applications of quantum probability in psychology

A. Khrennikov

*International Center for Mathematical Modeling, University of Vaxjo,
Sweden*

`andrei.khrennikov@vxu.se`

We shall show that probabilistic data from the famous Shafir-Tversky experiment of cognitive psychology can be described by quantum probability (and cannot by the classical Kolmogorov probability).

Теорема Воробьева, макроскопический реализм и теория туннелирования

Н. Л. Чуприков

Томский государственный педагогический университет, Россия

chnl@tspu.edu.ru

Одна из самых острых проблем современной квантовой теории (КТ) - это описание когерентных суперпозиций макроскопически различимых состояний (КСМРС). Макроскопическая различимость состояний, входящих в КСМРС, предполагает согласие КТ КСМРС с классической физикой (КФ). Но парадоксы Шредингера и Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР) наглядно показывают, что принцип суперпозиции (ПС) отрицает основы КФ - принципы макроскопического реализма (ПМР) и концепцию локальных скрытых параметров (ЛСП).

Важный шаг в разрешении конфликта был сделан так называемой "математической оппозицией", согласно которой ЭПР-парадокс не является основанием для отказа от ЛСП: 1) должным образом рассчитанные квантовые корреляции для положений (или импульсов) электронов в ЭПР-паре имеют свойства классических корреляций; 2) вывод неравенств Белла основан на неявном предположении, что данные, полученные в экспериментах с разными ориентациями детекторов частиц, описываются одним и тем же пространством вероятностей, что противоречит теореме Воробьева в теории вероятностей (ЭПР-пары в неодинаковых экспериментах не образуют статистический ансамбль).

В отличие от ПС теорема Воробьева запрещает усреднение по КСМРС. Это относится и к конечному состоянию электрона в задаче туннелирования - средние значения в этой задаче имеет смысл вычислять только для подансамблей прошедших и отраженных частиц. Это требуют и ПМР, согласно которым электрон, как точечный на атомных масштабах объект, может *либо* проходить через барьер, *либо* отражаться от него. Однако ПС исключает сценарий "либо-либо" для КСМРС. Более того, в стандартной модели (СМ) туннелирования состояние электрона на первых этапах процесса даже не является КСМРС. Таким образом, для согласования КТ туннелирования с теоремой Воробьева и ПМР необходимо не только пересмотреть формулировку ПС в отношении КСМРС, но и представить состояние частицы в виде КСМРС на *всех* этапах рассеяния.

Эту задачу решает альтернативная модель (Чуприков Н. Л., Изв. вузов, Физика. 2006, т.49, вып.2, с.3-9; вып.3, с.72-81) процесса туннелирования, на примере симметричных потенциальных барьеров. В ней состояние $\psi_{full}(x, E)$ частицы с энергией E единственным образом представлено в

виде $\psi_{full}(x, E) = \psi_{tr}(x, E) + \psi_{ref}(x, E)$, где ψ_{tr} и ψ_{ref} описывают подпроцессы прохождения и отражения, взаимодействующие в центре барьера x_c : ψ_{tr} и ψ_{ref} - решения уравнения Шредингера для всех x , исключая точку x_c , где их первые производные разрывны, а соответствующие плотности потока вероятности непрерывны. $\psi_{ref}(x, E) \equiv 0$ для $x > x_c$: при отражении частицы не пересекают точку x_c . Достаточно узкие в E -пространстве волновые пакеты, составленные из этих функций, всюду непрерывны во все моменты времени и имеют постоянную норму. Данная, "макрореалистичекая" модель туннелирования исключает эффект Хартмана, предсказанный СМ, и допускает экспериментальную проверку.

Модель воспламенения и горения порошкообразного алюминия при получении наночастиц

Н. В. Чуркина, А. И. Сафронов

Тольяттинский государственный университет, Россия

Natalia.churkina@gmail.com

Одним из перспективных направлений получения наночастиц окислов металлов является их сжигание в виде порошков в химическом реакторе. Оптимизация этого процесса и обеспечение безопасности эксплуатации реактора представляет собой сложную задачу, решение которой может осуществляться математическим моделированием. Последнее помогает вскрывать основные закономерности функционирования систем, формулировать требования к новым конструкциям и рабочим телам. Сложность заключается в построении замкнутой системы уравнений движения аэрозвеси при заданных физико-химических свойствах каждой фазы в отдельности и заданной исходной структуре смеси, причем необходимо учитывать различное поведение фаз. Система уравнений с заданными начальными и граничными условиями решается обычно методом Эйлера-Лагранжа.

Для описания процесса постепенного воспламенения аэрозвеси используется двухфазная двухскоростная модель гетерогенного потока при следующих допущениях: гранулы реагирующей смеси одинаковы по своим размерам и массе, учитывается кондуктивная, конвективная и лучистая составляющие коэффициента теплоотдачи; пренебрегаем трением газа о стенку и теплоотдачей в стенку камеры. Конвективная теплоотдача осуществляется раскаленным газом при обтекании частиц алюминия. Кондуктивная теплоотдача осуществляется за счет раскаленных частиц воспламенителя,

которые постепенно осаждаются на не воспламенившихся частицах реагирующей смеси. Лучистая теплоотдача учитывается по закону Стефана-Больцмана. Систему уравнений, полученную для расчета параметров течения гетерогенной среды, привели к безразмерному виду. Для определения времени воспламенения частиц совместно с системой уравнений решали уравнение зажигания. Численно уравнение зажигания решали методом прогонки. Для описания горения потока аэрозвеси частиц алюминия использована модель В.И. Малинина и др. [1], учитывающая кинетику процессов и особенности накопления окисла.

Проведены вычисления при различных входных параметрах процесса получения ультрадисперсного окисла алюминия. Предложена схема химического реактора, в котором подача аэрозвеси порошка металла осуществляется непрерывно, а воспламенение состава в установке происходит только в начальный момент времени. Далее процесс самоподдерживается за счет рециркуляции (время зажигания 6,5 мс, циркуляции 31 мс). Установка позволит получать непрерывно в больших количествах наночастицы окислов металлов. Рассчитано время воспламенения частиц алюминия в зависимости от их размеров. Получена линейная зависимость. Оценен вклад разных составляющих в коэффициент теплоотдачи. Установлено, что основной эффект на весь процесс оказывает конвективная составляющая.

Список литературы

- [1] Малинин В.И., Коломин Е.И., Анитипин И.С. Особенности горения частицы алюминия в потоке активных газов // Физика горения и взрыва. 1999. Т.35, № 1. С. 41-47.

Представления решений эволюционных уравнений с оператором Владимирова

Н. Н. Шамаров

Московский государственный университет, Россия

nshamarov@yandex.ru

Далее p — простое натуральное число, Z — кольцо целых рациональных чисел, $Q_p = \{x\}$ — поле p -адических чисел — формальных разложений $x = \sum_{k \in Z} x_k \cdot p^k$, где $x_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ и конечна сумма $\{x\}_p = \sum_{k < 0} x_k \cdot p^k$ ($\in Q \cap [0; 1)$); $\chi(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$; $|x|_p = p^{\inf\{k \in Z; x_k \neq 0\}}$ при $x \neq 0$ — нормирование на Q_p , dx — борелевская мера Хаара на $(Q_p, +)$, $L_q \equiv L_q(Q_p, dx)$

($q = 1, 2$), ν — борелевская мера на Q_p , $\tilde{\nu}(y) = \int_{Q_p} \chi(xy) \nu(dx)$ ($y \in Q_p$), $B_\nu : L_2 \ni f \mapsto f \cdot \tilde{\nu}$, унитарное преобразование Фурье в L_2 получаем замыканием оператора $L_1 \cap L_2 \ni f \mapsto \widetilde{f(x)dx} \equiv \tilde{f}$; $a > 0$, и равенство $\widetilde{D^a f(x)} = (|x|_p)^a \cdot \tilde{f(x)}$ определяет самосопряжённый в L_2 оператор Владимира [1] порядка $a > 0$.

Под задачей Коши для уравнения теплопроводности с оператором Владимира далее будем понимать задачу отыскания непрерывной функции Ψ аргумента t , определенной на неотрицательной вещественной полуоси, принимающей значения в нормированном подпространстве $D_a \subset L_2$ и удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} (d/dt)\Psi(t) = (-D^a + B_\nu)\Psi(t), \\ \Psi(0) = \psi_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $(d/dt)\Psi(t)$ при каждом $t \geq 0$ вычисляется как предел в L_2 -норме функции $[-t, +\infty) \ni \tau \mapsto \tau^{-1}(\Psi(t + \tau) - \Psi(t)) \in D_a$ при $\tau \rightarrow 0$ (для $t = 0$ предел понимается как правый). Эту задачу Коши далее называем задачей (1), ψ_0 — её начальным условием, Ψ — её решением.

Далее $S_p = \{f : Q_p \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ непрерывна, Card}f(Q_p) < \infty\}$, $C_R^t = \{\gamma : [0; t] \rightarrow Q_p; \forall s \in [0, t] \gamma_s = \gamma_{s+0}; \forall s \in (0, t] \exists \gamma_{s-0}\}$, где $t > 0$, $\gamma_s = \gamma(s)$, $\gamma_{s\pm 0} = \lim_{h \downarrow 0} \gamma(s \pm h)$.

Теорема 1.[2] *Задача (1) с н.у. $\psi_0 \in S_p$ имеет единственное решение, при каждом $t \in (0; +\infty)$ определяемое равенством*

$$\Psi(t)(x) = \psi(t, x) = \int_{C_R^t \ni \gamma} e^{\int_0^t v(x-\gamma(s)) ds} \psi_0(x - \gamma(t)) M_a^t(d\gamma), \quad (2)$$

где $v = \tilde{\nu}$ и M_a^t — некоторая симметричная счетно аддитивная вероятностная мера на сигма-алгебре в C_R^t , порожденной всеми “отображениями вычисления” вида $\delta_s : \xi \mapsto \xi(s)$, $C_R^t(Q_p) \rightarrow Q_p$.

Пусть $C_P^t = \{\eta \in C_R^t : \text{Card} \eta([0; t]) < \infty, \eta(t) = 0\}$.

Теорема 2. *В условиях предыдущей теоремы при каждом $t \in (0; +\infty)$ справедливо равенство*

$$\widetilde{\Psi(t)}(y) = \varphi(t, y) = \int_{C_P^t \ni \eta} e^{-\int_0^t (|y-\eta(s)|_p)^a ds} \varphi_0(y - \eta(t)) M_\nu^t(d\eta), \quad (3)$$

где $\varphi_0 = \tilde{\psi}_0$ и M_ν^t — некоторая счетно аддитивная комплексная мера на сигма-алгебре в C_P^t , порожденной всеми “отображениями вычисления” вида $\delta_s : \eta \mapsto \eta(s)$, $C_P^t(Q_p) \rightarrow Q_p$.

Теорема 3. *В условиях предыдущих теорем при каждом $t \in (0; +\infty)$ справедливы равенства*

$$\Psi(t)(q) = \int_{C_P^t \times C_R^t} \chi(\int \gamma d\eta) \psi_0(q - \gamma(t)) M_a^t(d\gamma) M_\nu^t(d\eta), \quad (4)$$

где $\int \gamma d\eta = \sum_{s: \eta_s \neq \eta_{s-0}} \gamma_s \cdot (\eta_s - \eta_{s-0})$, и

$$\Psi(t)(q) = \int_{Q_p \times C_p^t \times C_R^t} dy \int \Phi(d\eta, d\gamma) \chi(\int_0^t H(\gamma(s), y - \eta(s)) ds - y \cdot \gamma(t)) \varphi_0(y), \quad (5) \text{ где}$$

$H(x, y) = -(|y|_p)^a + v(x)$, симплектическая псевдомера Фейнмана $\Phi(d\eta, d\gamma)$ понимается как линейный функционал на пространстве счетно аддитивных мер, определенных на произведении определенных выше измеримых пространств C_p^t и C_R^t , задаваемый (аналогично [3]) равенством (Планшереля)

$$\int_{C_p^t \times C_R^t} \widetilde{M}(\eta, \gamma) \Phi(d\eta, d\gamma) = \int_{C_R^t \times C_p^t} \chi(\int \gamma_1, d\eta_1) M(d\gamma_1, d\eta_1),$$

где, в свою очередь, преобразование Фурье меры M задается равенством $\widetilde{M}(\eta, \gamma) = \int_{C_R^t \times C_p^t \ni (\gamma_1, \eta_1)} \chi(\int \gamma_1 d\eta + \int \gamma d\eta_1) M(d\gamma_1, d\eta_1)$.

Литература

- [1] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.: p -адический анализ и математическая физика.// М.: Наука. Физматлит., 1994.
 [2] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.: Формулы Фейнмана и Фейнмана-Каца для эволюционных уравнений с оператором Владимирова.// Доклады Академии Наук, 2008, т420, №1, 27–32.
 [3] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.: Континуальные интегралы.// Москва, Издательство МГУ, 1990.

Representations of solutions of evolutionary equations with Vladimirov operator

Shamarov N. N.

Moscow State University, Russia

nshamarov@yandex.ru

Below p is a prime natural number, Z is the ring of integral rational numbers, $Q_p = \{x\}$ is a field of p -adic numbers, which are formal expansions $x = \sum_{k \in Z} x_k \cdot p^k$, where $x_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ and the sum $\{x\}_p = \sum_{k < 0} x_k \cdot p^k$ ($\in Q \cap [0; 1)$) is finite; $\chi(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$; $|x|_p = p^{-\inf\{k \in Z; x_k \neq 0\}}$ for $x \neq 0$ defines a norm on Q_p , dx is a Borel Haar measure on $(Q_p, +)$, $L_q \equiv L_q(Q_p, dx)$ ($q = 1, 2$), ν is a Borel measure on Q_p , $\tilde{\nu}(y) = \int_{Q_p} \chi(xy) \nu(dx)$ ($y \in Q_p$), $B_\nu : L_2 \ni f \mapsto f \cdot \tilde{\nu}$; one obtains unitary Fourier transform in L_2 as a closure of the operator $L_1 \cap L_2 \ni f \mapsto \widetilde{f(x)dx} \equiv \tilde{f}$; $a > 0$, and the equality

$\widetilde{D}^a f(x) = (|x|_p)^a \cdot \widetilde{f}(x)$ defines the self-adjoint in L_2 Vladimirov operator [1] of the order a .

A Cauchy problem for a heat equation with Vladimirov operator means below a problem to find such continuous function Ψ , of the real argument $t \geq 0$, which values in normed subspace $D_a \subset L_2$ and satisfies the conditions:

$$\begin{cases} (d/dt)\Psi(t) = (-D^a + B_\nu)\Psi(t), \\ \Psi(0) = \psi_0, \end{cases} \quad (1)$$

where $(d/dt)\Psi(t)$ for each $t \geq 0$ is calculated as a limit, in L_2 -norm, of the function $[-t, +\infty) \ni \tau \mapsto \tau^{-1}(\Psi(t+\tau) - \Psi(t)) \in D_a$ as $\tau \rightarrow 0$ (for $t = 0$ one understands the limit as the left one). We call below this Cauchy problem the Problem (1), ψ_0 is referred as its starting condition and Ψ is called its solution.

Let $S_p = \{f : Q_p \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ is continuous, } \text{Card}f(Q_p) < \infty\}$, $C_R^t = \{\gamma : [0; t] \rightarrow Q_p; \forall s \in [0, t] \gamma_s = \gamma_{s+0}; \forall s \in (0, t] \exists \gamma_{s-0}\}$, where $t > 0$, $\gamma_s = \gamma(s)$, $\gamma_{s\pm 0} = \lim_{h \downarrow 0} \gamma(s \pm h)$.

Theorem 1. [2] *The Problem (1) with starting condition $\psi_0 \in S_p$ has unique solution which is defined for each $t \in (0; +\infty)$ by the equality*

$$\Psi(t)(x) = \psi(t, x) = \int_{C_R^t \ni \gamma} e^{\int_0^t v(x-\gamma(s)) ds} \psi_0(x - \gamma(t)) M_a^t(d\gamma), \quad (2)$$

where $v = \widetilde{v}$ and M_a^t is a symmetric countably additive probability measure on the sigma-algebra in C_R^t generated by all "evaluation mappings" of the kind $\delta_s : \xi \mapsto \xi(s)$, $C_R^t(Q_p) \rightarrow Q_p$.

Let $C_P^t = \{\eta \in C_R^t : \text{Card} \eta([0; t]) < \infty, \eta(t) = 0\}$.

Theorem 2. *Under the conditions of the previous Theorem at each $t \in (0; +\infty)$ the following equality is true:*

$$\widetilde{\Psi}(t)(y) = \varphi(t, y) = \int_{C_P^t \ni \eta} e^{-\int_0^t (|y-\eta(s)|_p)^a ds} \varphi_0(y - \eta(t)) M_\nu^t(d\eta), \quad (3)$$

where $\varphi_0 = \widetilde{\psi}_0$ and M_ν^t — is a countably additive complex measure on the sigma-algebra in C_P^t generated by all "evaluation mappings" of the kind $\delta_s : \eta \mapsto \eta(s)$, $C_P^t(Q_p) \rightarrow Q_p$.

Theorem 3. *In terms of the two previous Theorems, for each $t \in (0; +\infty)$ the following equalities are true:*

$$\Psi(t)(q) = \int_{C_P^t \times C_R^t} \chi(\int \gamma d\eta) \psi_0(q - \gamma(t)) M_a^t(d\gamma) M_\nu^t(d\eta), \quad (4)$$

where $\int \gamma d\eta = \sum_{s: \eta_s \neq \eta_{s-0}} \gamma_s \cdot (\eta_s - \eta_{s-0})$, and

$$\Psi(t)(q) = \int_{Q_p} dy \int_{C_P^t \times C_R^t} \Phi(d\eta, d\gamma) \chi(\int_0^t H(\gamma(s), y - \eta(s)) ds - y \cdot \gamma(t)) \varphi_0(y), \quad (5) \text{ where}$$

$H(x, y) = -(|y|_p)^a + v(x)$, the symplectic Feynman pseudomeasure $\Phi(d\eta, d\gamma)$ is understood as a linear functional on the space of all countably additive measures defined on the product of the defined above measurable spaces C_P^t and C_R^t , and

which is given (analogously to [3]) by the (Plancherel) equality

$$\int_{C_P^t \times C_R^t} \widetilde{M}(\eta, \gamma) \Phi(d\eta, d\gamma) = \int_{C_R^t \times C_P^t} \chi\left(\int \gamma_1, d\eta_1\right) M(d\gamma_1, d\eta_1),$$

where, in its turn, the Fourier transform of the measure M is defined by the equality

$$\widetilde{M}(\eta, \gamma) = \int_{C_R^t \times C_P^t \ni (\gamma_1, \eta_1)} \chi\left(\int \gamma_1 d\eta + \int \gamma d\eta_1\right) M(d\gamma_1, d\eta_1).$$

Literature

- [1] Vladimirov V.S., Volovich I.V., Zelenov E.I. : *p*-adic analysis and mathematical physics // M.: Nauka.Fizmatlit., 1994. (RUS)
 [2] O. G. Smolyanov and N. N. Shamarov: Doklady Mathematics, 2008, Vol. 77, No. 3, pp. 345–349. Pleiades Publishing, Ltd., 2008.
 [3] Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T.: Continual integrals // Moscow, MSU Publishing, 1990. (RUS)

Моделирование промерзания и оттаивания двумерной области расчёта в постановке Колесникова за счёт граничных условий, включающих сопряжённые

Д. В. Шевелева

ОАО «Гипротюмнефтегаз», Россия

Sheveleva@gtng.ru

В докладе предложен метод расчёта температуры нефти и радиуса оттаивания вокруг скважины. Задача относится к классу сопряжённых задач. Для решения задачи теплообмена рассмотрим следующую систему уравнений:

$$c(T) \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \lambda(T) \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(T) \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial z}) \right) \quad (1)$$

$$\frac{Gc_p}{u} \frac{\partial t(z, \tau)}{\partial z} = K_s(z) (T(r_s, z, \tau) - t(z, \tau)) \quad (2)$$

$$\lambda(T) \frac{dT(r, z, \tau)}{dr} \Big|_{r=r_s} = K_s(z) (T(r_s, z, \tau) - t(z, \tau)) \quad (3)$$

Условием сопряжения температурных полей газа и горных пород является граничное условие – уравнение (3) системы уравнений. Где T – температура горных пород, r – координата цск, z – координата цск, τ – координата

времени, $t(z, \tau)$ - температура нефти, $K_s(z)$ - коэффициент теплопередачи скважины, $\lambda(T)$ - коэффициент теплопроводности, r_s - радиус скважины.

Распределение температуры газа в скважине описывается уравнением притока тепла (2). Где G - дебит газовой скважины, c_p - теплоёмкость нефти, u - периметр сечения скважины. За счёт упрощений, уравнение (2) имеет аналитическое решение. Это решение подставляется в уравнение (3) и получается граничное условие специфического вида:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = K_s(z) (T_{r=r_s} - t_0 \ell^{-az} - \ell^{-az} \int_0^z a T_{r=r_s} \ell^{az'} dz')$$

Горные породы включают вечную мерзлоту. Для температурного поля пород решается дифференциальное уравнение параболического типа (1), где $s(T)$ - эффективная теплоёмкость. Зависимость теплоёмкости от температуры аппроксимирована линейным сплайном. За счёт этого можно провести квазилинеаризацию уравнения (1).

Решается задача теплопроводности с фазовым переходом в постановке Колесникова. Задача двумерная, поэтому включает четыре граничных условия. Меняя граничные условия, можно смоделировать следующие процессы, помимо теплового взаимодействия со скважиной.

Если в предложенной модели вместо скважины на левой границе области поставить нулевой поток равный нулю, то можно смоделировать одномерное промерзание из-за среднегодовой температуры воздуха на поверхности земли. Если задать дебит равный нулю, то после эксплуатации скважины в течение некоторого промежутка времени, можно будет получить динамику обратного промерзания.

Базисы p -адических всплесков: теория и приложения

В. М. Шелкович

Санкт-Петербургский Государственный Архитектурно-строительный университет, Россия

shelkv@vs1567.spb.edu

Рассматривается теория многомерных p - адических базисов всплесков в связи с теорией многомерных p -адических псевдодифференциальных операторов и уравнений.

Вводится понятие *p*-адического кратного-масштабного анализа (КМА) [5]. Строится КМА хааровского типа, который порождается *масштабирующим уравнением хааровского типа*:

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{p-1} \phi\left(\frac{1}{p}x - \frac{r}{p}\right), \quad x \in \mathbf{Q}_p, \quad (1)$$

решение которого (*масштабирующая функция*) ϕ является характеристической функцией единичного круга. Это уравнение отражает следующий геометрический факт (имеющий *ультраметрическую* природу): единичный круг $B_0(0) = \{x : |x|_p \leq 1\}$ представляется как сумма p попарно непересекающихся кругов, т.е. $B_0(0) = \cup_{r=0}^{p-1} B_{-1}(r)$, $x \in \mathbf{Q}_p$, где $B_{-1}(r) = \{x : |\frac{x}{p} - \frac{r}{p}|_p \leq 1\}$ – круг радиуса p^{-1} с центром в точке r , $r = 0, 1, \dots, p-1$. Идея использования уравнения (1) как масштабирующего была выдвинута в [3]. В рамках этого КМА дается описание (*счетного числа*) p -адических ортонормальных хааровских базисов всплесков в $L^2(\mathbf{Q}_p^n)$ (случай $p = 2$ рассмотрен в [5]).

Также строятся нехааровские многомерные p -адические ортонормальные базисы всплесков в $L^2(\mathbf{Q}_p^n)$ (см. [3], [4]).

Рассматривается пространство $\Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ p -адических распределений Лизоркина, введенное в [1]). На этом пространстве вводится класс p -адических псевдодифференциальных операторов

$$(Af)(x) = F^{-1}[\mathcal{A}(\xi) F[f](\xi)](x), \quad f \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n), \quad (2)$$

где F – преобразование Фурье, $\mathcal{A}(\xi)$ – символ оператора, который является локально-постоянной функцией на $\mathbf{Q}_p^n \setminus \{0\}$. Отметим, что в этот класс операторов входит дробный оператор и операторы, введенные в работах Кочубея и Зуниги-Галиндо.

Выведены критерии того, что упомянутые выше p -адические всплески являются собственными функциями для p -адических псевдодифференциальных операторов (2).

Перечисленные выше результаты применяются для решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A_x u(x,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,t) = u^0(x), & t = 0, \end{cases}$$

где $t \in \mathbf{R}$, $u^0 \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ и $A_x u(x,t) = F^{-1}[\mathcal{A}(\xi) F[u(\cdot, t)](\xi)](x)$ псевдодифференциальный оператор (2) (по x), $u(x,t) \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ – неизвестная функция;

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A_x u(x,t) + u(x,t)|u(x,t)|^{2m} = 0, & t > 0, \\ u(x,t) = u^0(x), & t = 0, \end{cases}$$

где $m \in \mathbf{N}$, $u(x, t) \in \Phi'(\mathbf{Q}_p^n)$ – неизвестная функция (см. [2]).

Исследования были поддержаны грантом РФФИ 05-01-04002-НННОа и DFG Projects 436 RUS 113/809 и 436 RUS 113/951.

[1] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, Harmonic analysis in the p -adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p -adic wavelets, Tauberian theorems, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 12, Issue 4, (2006), 393–425.

[2] С. Альберерио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, p -Адические полулинейные эволюционные псевдодифференциальные уравнения в пространствах Лизоркина, ДРАН, **415**, no. 3, (2007), 295–299.

[3] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, p -Adic multidimensional wavelets and their application to p -adic pseudo-differential operators, Preprint at the url: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049>

[4] А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, Нехааровские p -адические всплески и псевдодифференциальные операторы, ДРАН, **418**, no. 2, (2008), 167–170.

[5] V. M. Shelkovich, M. Skopina p -Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators. Preprint at the url: <http://arxiv.org/abs/0705.2294>

Дельта-ударные волны в многомерных системах законов сохранения

В. М. Шелкович

Санкт-Петербургский Государственный Архитектурно-строительный университет, Россия

`shelkv@vs1567.spb.edu`

Рассмотрим многомерную систему законов сохранения

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho F(U)) = 0, \quad (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho M(U)) = 0, \quad (1)$$

где $F = (F_1, \dots, F_n)$ – заданное векторное поле, $M = (M_{kj})$ – заданное тензорное поле, $F_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $M_{kj} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j, k = 1, \dots, n$; $\rho = \rho(x, t)$ и $U = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)) \in \mathbf{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $t \geq 0$. Частным случаем (1) являются система уравнений газовой динамики без давления

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \quad (\rho U)_t + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) = 0, \quad (2)$$

где $\rho \geq 0$ – плотность, U – скорость, \cdot – скалярное произведение векторов, \otimes – тензорное произведение векторов.

Такие системы могут иметь неклассические решения типа δ -ударных волн. Это решения (U, ρ) , в компоненте ρ которых могут возникать дельта-образные сингулярности. Например, где ρ представляется в виде суммы $\rho(x, t) = \hat{\rho}(x, t) + e(x, t)\delta(\Gamma)$, где $U, \hat{\rho} \in L^\infty$, $e \in C(\Gamma)$, $\Gamma = \{(x, t) : S(x, t) = 0\}$ – гиперповерхность коразмерности 1 в верхнем полупространстве $\{(x, t) : x \in \mathbf{R}^n, t \in [0, \infty)\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Чтобы работать с такими сильно сингулярными решениями необходимо развить специальную аналитическую технику.

Для определения решений типа δ -ударных волн в системе (1) вводятся специальные интегральные тождества (расширяющие понятие слабого решения), и находятся условия Ренкина-Гюгонио.

Рассмотрен геометрический аспект таких решений: они связаны с *процессами переноса и концентрации*. Предположим, что движущаяся поверхность $\Gamma_t = \{x : S(x, t) = 0\}$ все время разделяет \mathbf{R}_x^n на две части $\Omega_t^- = \{x \in \mathbf{R}^n : S(x, t) < 0\}$ и $\Omega_t^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : S(x, t) > 0\}$. Пусть (U, ρ) имеет компактный носитель по x . Обозначим через $M(t) = \int_{\Omega_t^- \cup \Omega_t^+} \rho(x, t) dx$, $P(t) = \int_{\Omega_t^- \cup \Omega_t^+} \rho(x, t)U(x, t) dx$ “массу” и “импульс” области $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$, а через $m(t) = \int_{\Gamma_t} e(x, t) d\mu(x)$, $p(t) = \int_{\Gamma_t} e(x, t)U_\delta(x, t) d\mu(x)$ “массу” и “импульс” движущегося волнового фронта Γ_t , где $d\mu(x)$ – элемент площади Γ_t . Мы доказываем, что имеют место *балансовые соотношения для “массы” и “импульса”*:

$$\dot{M}(t) = -\dot{m}(t), \quad \dot{P}(t) = -\dot{p}(t); \quad (3)$$

Таким образом идет *процесс переноса “массы” и “импульса”* из объема $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$ на движущийся фронт δ -ударной волны Γ_t и обратно. При этом *полные “масса” $M(t) + m(t)$ и “импульс” $P(t) + p(t)$ не зависят от времени*. В случае системы (2) законы (3) являются законами переноса массы и импульса. При этом идет *процесс концентрации* массы на движущийся фронт Γ_t .

Обозначим через

$$W(t) = 1/2 \int_{\Omega_t^- \cup \Omega_t^+} \rho(x, t)|U(x, t)|^2 dx,$$

$$w(t) = 1/2 \int_{\Gamma_t} e(x, t)|U_\delta(x, t)|^2 d\mu(x)$$

энергию области $\Omega_t^- \cup \Omega_t^+$ и движущегося волнового фронта Γ_t , соответственно. Здесь $W(t) + w(t)$ – полная энергия. Мы доказываем, что для системы (2)

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq 0, \quad \frac{d}{dt}(W(t) + w(t)) \leq 0,$$

то есть энергии $W(t)$ и $W(t) + w(t)$ – невозрастающие величины.

Рассматривается физический контекст такого типа решений и возможные приложения.

Результаты базируются на работах [1]–[3].

Исследования были поддержаны грантами DFG Projects 436 RUS 113/823 и 436 RUS 113/895.

[1] S. Alberverio, V. M. Shelkovich, On the delta- shock front problem, in the book: Analytical Approaches to Multidimensional Balance Laws, Ch. 2, (Ed. O. S. Rozanova), Nova Science Publishers, Inc., 2005, pp. 45–88.

[2] В. М. Шелкович, Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ - и δ' -ударных волн и процессы переноса и концентрации, Успехи Математических Наук, **63**, вып. 3(381), (2008), 73-146.

[3] V. M. Shelkovich, Multidimensional delta-shock waves and the transportation and concentration processes, Preprint at the url: <http://arxiv.org/abs/0803.3549v1>

Решение задачи Гурса для системы телеграфных уравнений с нильпотентным коэффициентом

Г. А. Шибельбаин

Самарский государственный университет, Россия

Для системы телеграфных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - Gu = 0, (1)$$

где $G = \|g_{ij}\|$ - есть постоянная матрица размерности $(n \times n)$, $u(\xi, \eta) = colon[u_1(\xi, \eta), u_2(\xi, \eta), \dots, u_n(\xi, \eta)]$ - искомая матрица-столбец рассмотрена задача.

Задача Гурса. Найти решение $u = u(\xi, \eta)$ системы телеграфных уравнений (1) регулярное в области $D_0 = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \xi_0; 0 < \eta < \eta_0\}$, принимающее на характеристиках $\xi = 0, \eta = 0$, заданные значения :

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi), u(0, \eta) = \psi(\eta), (2)$$

где $\varphi(\xi) \in C^2(\xi_0, 0), \psi(\eta) \in C^2(0, \eta_0)$ - известные n -мерные векторы.

Имеет место теорема.

Теорема. Если G - нильпотентная матрица ($G^m = 0, m \leq n$), то для любой точки $M^0(\xi, \eta) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ найдется не более чем $n(m-1)$ точек $M_r^j(x_r^j, y_r^j)$ ($1 \leq j \leq m-1, 1 \leq r \leq n$) в области $D = \{(x, y) : 0 < x < \xi_0; 0 < y < \eta_0\}$ таких, что решение системы телеграфных уравнений (1) в точке $M^0(\xi, \eta)$ представляет собой следующую линейную комбинацию решений

задачи Гурса для системы волновых уравнений (система (1) при $G = 0$) с краевыми условиями (2):

$$u(M^0) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{G^k S^k}{k!} \text{colon}[\omega_1(M_1^k), \omega_2(M_1^k), \dots, \omega_n(M_n^k)] + \omega(M^0), \quad (3)$$

где $S = \xi\eta$ - площадь характеристического прямоугольника D ,
 $\omega(\xi, \eta) = \text{colon}[\omega_1(M_1^k), \omega_2(M_1^k), \dots, \omega_n(M_n^k)]$ - решение задачи Гурса с условиями (2) удовлетворяющее уравнению (1) при $G = 0$.

Следствие. Если $G^2 = 0$, то существуют точки

$$M_1, M_2 \in \{(x, y) : 0 < x < \xi, 0 < y < \eta\}$$

такие, что решение системы телеграфных уравнений (1) в точке $M(\xi; \eta)$ имеет вид

$$u(M) = \left\| \begin{array}{c} u_1^0(M) \\ u_2^0(M) \end{array} \right\| + SG \left\| \begin{array}{c} u_1^0(M_1) \\ u_2^0(M_2) \end{array} \right\|,$$

где $u_i^0(M)$, $i = 1, 2$ - решение задачи Гурса для волнового уравнения с краевыми условиями (2).

Inverse indefinite spectral problem for high order differential operator pencil with complex periodic coefficients

R. F. Efendiev

Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Azerbaijan
rakibaz@yahoo.com

The inverse problem for the differential operator pencil with complex periodic potential and discontinuous coefficients on the axis is studied. Main characteristics of the fundamental solutions are investigated, the spectrum of the operator is studied. We give formulation of the inverse problem, prove a uniqueness theorem and provide a constructive procedure for the solution of the inverse problem.